中国科学: 数学 2025 年 第 55 卷 第 3 期: 1～16
SCIENTIA SINICA Mathematica

论 文

不可压新 Hooke 型弹性动力学自由边界问题的爆破准则

献给肖玲教授 85 华诞

付杰[1,2], 郝成春[1,2*], 杨思奇[1,2], 张伟[3]

1. 中国科学院数学与系统科学研究院数学研究所, 北京 100190;
2. 中国科学院大学数学科学学院, 北京 100049;
3. 首都师范大学数学科学学院, 北京 100048

E-mail: fujie21a@mails.ucas.ac.cn, hcc@amss.ac.cn, yangsiqi@amss.ac.cn, B445@cnu.edu.cn

收稿日期: 2023-11-23; 接受日期: 2024-01-11; 网络出版日期: 2024-04-07; * 通信作者
国家自然科学基金 (批准号: 12171460)、中国科学院稳定支持基础研究领域青年团队计划 (批准号: YSBR-031) 和国家重点研发计划 (批准号: 2021YFA1000800) 资助项目

摘要 本文证明 3 维不可压新 Hooke 型弹性动力学模型自由边界问题解的 Beale-Kato-Majda 型爆破准则. 该结果表明, 在 Taylor 型符号条件成立的情形下, 只要形变张量和速度场的旋度、自由边界的第二基本形式、标准指数映射的单射半径以及压力的某些范数有界, 并且速度和形变张量的梯度及压力梯度的物质导数在自由边界上有界, 该解就可以一直延续.

关键词 自由边界问题 不可压新 Hooke 型弹性动力学模型 Beale-Kato-Majda 型爆破准则

MSC (2020) 主题分类 35B44, 35R35

1 引言

考虑下列不可压新 Hooke 型弹性动力学方程的自由边界问题: 在 $\mathcal{D} := \bigcup_{0\leqslant t\leqslant T}(\{t\}\times\mathcal{D}_t)$ 中,

$$\begin{cases} v_t + v\cdot\partial v + \partial p = \operatorname{div}(FF^\top), \\ F_t + v\cdot\partial F = \partial v F, \\ \operatorname{div} v = 0, \quad \operatorname{div} F^\top = 0, \\ v|_{t=0} = v_0, \quad F|_{t=0} = F_0, \quad \mathcal{D}_0 = \Omega, \end{cases} \tag{1.1}$$

其中, $\mathcal{D}_t \subset \mathbb{R}^3$ 代表物质在时刻 $t\in[0,T]$ 所占据的区域 $(T>0)$, Ω 为 $\mathbb{R}^3$ 中的单位球, ∂ 和 div 分别表示 Euclid 坐标下的梯度算子和散度算子, $v(t,x)$、$F(t,x) = (F_{ij}(t,x))_{3\times 3}$ 和 $p(t,x)$ 分别表示速度场、形

英文引用格式: Fu J, Hao C C, Yang S Q, et al. A blow-up criterion for the free boundary problem of incompressible neo-Hookean elastodynamics (in Chinese). Sci Sin Math, 2025, 55: 1–16, doi: 10.1360/SSM-2023-0320

变张量和压力, $F^\top = (F_{ji})$ 代表 F 的转置, $FF^\top$ 在新 Hooke 型弹性材料的情形表示 Cauchy-Green 张量. 其他记号如下: $(\partial v)_{ij} = \partial_j v_i$、$(\partial v F)_{ij} = (\partial v F)^{ij} = (\partial v)_{ik} F^{kj} = \partial_k v^i F^{kj}$、$\operatorname{div} v = \partial_i v^i$、$(\operatorname{div} F^\top)^i = \partial_j F^{ji}$、$v^i = \delta^{ij} v_j = v_i$, $F^{ij} = \delta^{ik}\delta^{jl} F_{kl} = F_{ij}$. 这里使用了 Einstein 求和的约定.

所满足的边界条件如下:

$$\begin{cases} p = 0 & \text{在 } \partial\mathcal{D} \text{ 上}, \\ n \cdot F^\top = 0 & \text{在 } \partial\mathcal{D} \text{ 上}, \\ (\partial_t + v \cdot \partial)|_{\partial\mathcal{D}} \in T(\partial\mathcal{D}), \end{cases} \tag{1.2}$$

其中 $n(t,x)$ 是自由边界 $\partial\mathcal{D}_t$ 的外单位法向量而 $T(\partial\mathcal{D})$ 是 $\partial\mathcal{D}$ 的切空间.

除了上述边界条件外, 还需要一个稳定性条件. Hao 和 Wang [12] 在 Taylor 型符号条件

$$\partial_n p \leqslant -\varepsilon < 0 \quad \text{在 } \partial\mathcal{D}_t \text{ 上} \tag{1.3}$$

成立的情形下, 建立了方程组 (1.1) 和 (1.2) 解的先验估计, 其中常数 $\varepsilon > 0$, 且若它在初始时刻成立则会在一段时间内都成立.

1.1 背景与已知结果

新 Hooke 型弹性动力学方程是一种描述固体材料变形和应力响应的数学模型, 它是基于 Hooke 定律的变形能密度函数而建立的. 在这个模型中, 材料的应力与应变之间的关系是非线性的, 从数学角度来看, 该非线性仅仅是由不可压缩性产生的结果 [5]. 新 Hooke 型弹性动力学方程的自由边界问题的研究涉及理解材料的变形与周围环境之间的相互作用, 以及这如何影响边界行为. 由于它提供了关于在动态条件下可变形材料行为的洞察与理解, 并可推动制造工艺和材料设计的进步, 因此这一研究领域对于各种工程和材料科学应用至关重要.

与弹性动力学方程在全空间上的初值问题或固定区域上的初边值问题的研究相比, 其自由边界问题的研究却屈指可数. 这里简要回顾一些已知的结果. 对不可压新 Hooke 型弹性动力学方程的自由边界问题, Hao 和 Wang [12] 对同胚于球的有界初始区域在 Taylor 符号条件 (1.3) 下建立了非线性方程解的先验估计; Zhang [17] 对于初始区域为 $\mathbb{T}^2 \times (0,1)$ 的情形在边界上满足 Taylor 符号条件下得到了解的局部存在唯一性; Gu 和 Wang [10] 对于初始区域为 $\mathbb{T}^2 \times (0,1)$ 的情形在两个边界上分别满足 Taylor 符号条件和非共线条件下得到了解的局部存在唯一性; Li 等 [15] 对于初始区域为 $\mathbb{T}^2 \times [-1,1]$ 且在边界上满足混合边界条件的情形证明了解的局部存在唯一性; Hu 和 Huang [13] 对同胚于球的有界初始区域在边界上满足 Taylor 符号条件 (1.3) 和与 (1.2) 中第 2 个条件不同的边界条件下证明了解的局部存在性; Li 等 [14] 对于初始区域为 $\mathbb{T}^2 \times [-1,1]$ 的情形在某种稳定性条件下证明了非齐次 (双相) 方程自由界面问题解的局部存在唯一性. 对于含表面张力的情形, Gu 和 Lei [9] 对于初始区域为 $\mathbb{T} \times (0,1)$ 的二维情形证明了解的局部存在唯一性; Xu 等 [16] 对于 3 维带状初始区域得到了不可压黏弹性方程自由边界问题解的整体存在唯一性; Di Iorio 等 [4] 证明了高 Weissenberg 数情形下的二维 Oldroyd-B 型黏弹性方程的飞溅奇异性的存在性.

有很多关于自由或固定边界问题和初值问题的爆破准则的研究. Beale 等 [1] 证明了, 如果 v 是在 $[0,T) \times \mathbb{R}^3$ 上的不可压 Euler 方程的一个光滑解且满足 $\int_0^T \|\nabla \times v(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} dt < +\infty$, 则这个解可以在 $t = T$ 后被延拓. 对于不可压 Euler 方程的自由边界问题, Ginsberg [8] 证明了在 Taylor 符号条件

下存在一种爆破准则; 对于不可压理想磁流体方程自由边界问题, 本文作者 [7] 给出了 BKM (Beale-Kato-Majda) 型爆破准则. 本文的目标是将上述思想推广到新 Hooke 型弹性动力学方程自由边界问题中.

1.2　Lagrange 坐标下的方程

引入 Lagrange 坐标将自由边界问题变为固定边界问题. 令 $x = x(t, y)$ 满足

$$\frac{dx}{dt} = v(t, x(t, y)), \quad x(0, y) = y, \quad y \in \Omega.$$

标准的 Euclid 度量 δ_{ij} 在 $\mathcal{D}_t$ 上诱导出度量及其逆:

$$g_{ab}(t, y) = \delta_{ij} \frac{\partial x^i}{\partial y^a} \frac{\partial x^j}{\partial y^b}, \quad g^{cd}(t, y) = \delta^{kl} \frac{\partial y^c}{\partial x^k} \frac{\partial y^d}{\partial x^l}.$$

下面将使用关于 g 的协变导数, 若 $\alpha = \alpha_{a_1 \cdots a_r} dy^{a_1} \cdots dy^{a_r}$ 是一个 $(0, r)$ 型张量, 则 $\nabla\alpha$ 是一个 $(0, r+1)$ 型张量, 其分量为

$$\nabla_a \alpha_{a_1 \cdots a_r} = \partial_a \alpha_{a_1 \cdots a_r} - \Gamma^b_{a_1 a} \alpha_{b a_2 \cdots a_r} - \cdots - \Gamma^b_{a a_r} \alpha_{a_1 \cdots a_{r-1} b},$$

其中 Γ^c_{ab} 为 Christoffel 符号, 显然有 $[\nabla_a, \nabla_b] = 0$. 在 y 坐标下, 有

$$\partial_i = \frac{\partial}{\partial x^i} = \frac{\partial y^a}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial y^a},$$

物质导数为

$$D_t = \frac{\partial}{\partial t}\Big|_{y=\text{常数}} = \frac{\partial}{\partial t}\Big|_{x=\text{常数}} + v^k \frac{\partial}{\partial x^k}.$$

设 $k(t, x)$ 是一个 $(0, r)$ 型张量, $w_{a_1 \cdots a_r}(t, y) = \frac{\partial x^{i_1}}{\partial y^{a_1}} \cdots \frac{\partial x^{i_r}}{\partial y^{a_r}} k_{i_1 \cdots i_r}(t, x)$, 则

$$D_t w_{a_1 \cdots a_r} = \frac{\partial x^{i_1}}{\partial y^{a_1}} \cdots \frac{\partial x^{i_r}}{\partial y^{a_r}} \left(D_t k_{i_1 \cdots i_r} + \frac{\partial v^\ell}{\partial x^{i_1}} k_{\ell \cdots i_r} + \cdots + \frac{\partial v^\ell}{\partial x^{i_r}} w_{i_1 \cdots \ell} \right).$$

令 $u_a = v_i \frac{\partial x^i}{\partial y^a}$, $u^a = g^{ab} u_b$, $\mathbb{F}_{ab} = F_{ij} \frac{\partial x^i}{\partial y^a} \frac{\partial x^j}{\partial y^b}$, $\mathbb{F}^{ab} = g^{ac} g^{bd} \mathbb{F}_{cd}$, N^a 为 $\partial\Omega$ 上的外单位法向量, 则 Lagrange 坐标下的方程如下:

$$\begin{cases} D_t u_a + \nabla_a q = u^c \nabla_a u_c + \nabla_c \mathbb{F}_{ab} \mathbb{F}^{cb} & \text{在 } [0, T] \times \Omega \text{ 内}, & \text{(1.4a)} \\ D_t \mathbb{F}_{ab} = g^{dc} \nabla_d u_a \mathbb{F}_{cb} + \mathbb{F}_{cb} \nabla_a u^c + \mathbb{F}_{ac} \nabla_b u^c & \text{在 } [0, T] \times \Omega \text{ 内}, & \text{(1.4b)} \\ \nabla_a u^a = 0, \quad \nabla_a \mathbb{F}^{ab} = 0 & \text{在 } [0, T] \times \Omega \text{ 内}, & \text{(1.4c)} \\ q = 0, \quad N^a \mathbb{F}_{ab} = 0 & \text{在 } [0, T] \times \partial\Omega \text{ 上}, & \text{(1.4d)} \\ u|_{t=0} = v_0, \quad \mathbb{F}|_{t=0} = F_0. & & \text{(1.4e)} \end{cases}$$

1.3　主要结果

令 $\mathcal{N}$ 是定义在 $\partial\Omega$ 上的 Dirichlet-Neumann 算子. 对于 $\psi : \partial\Omega \to \mathbb{R}$, 记 $\psi_{\mathcal{H}} : \Omega \to \mathbb{R}$ 为 ψ 到 Ω 的调和延拓, 而 N 表示 $\partial\Omega$ 的单位外法向量, 则有

$$\mathcal{N}\psi = (N \cdot \nabla\psi_{\mathcal{H}})|_{\partial\Omega}.$$

记 $U=u|_{\partial\Omega}$, 定义

$$\mathcal{A}(t)=\|\nabla\times u(t)\|_{L^\infty(\Omega)}+\|\nabla\times\mathbb{F}^\top(t)\|_{L^\infty(\Omega)}+\|\nabla u(t)\|_{L^\infty(\partial\Omega)}+\|\nabla\mathbb{F}(t)\|_{L^\infty(\partial\Omega)}+\|\mathcal{N}U(t)\|_{L^\infty(\partial\Omega)},$$
$$\mathcal{B}(t)=\|\theta(t)\|_{L^\infty(\partial\Omega)}+\frac{1}{\iota_0(t)}+\|(\nabla_N q(t))^{-1}\|_{L^\infty(\partial\Omega)},$$

其中, $(\nabla\times\mathbb{F}^\top)_{abc}:=\nabla_a\mathbb{F}_{bc}-\nabla_b\mathbb{F}_{ac}$, θ 为 Lagrange 坐标下 $\partial\Omega$ 的第二基本形式, ι_0 如下节中所定义.

本文的主要结果如下.

定理 1.1 设 $(u,\mathbb{F})$ 是方程 (1.4) 在满足条件 (1.3) 下的一个解且满足

$$u(t),\mathbb{F}(t)\in H^4(\Omega),\quad 0\leqslant t\leqslant T.$$

假定 u 和 $\mathbb{F}$ 作为方程 (1.4) 在满足条件 (1.3) 下的解可以被连续延拓的最大时间为 T^*, 则或者 $T^*=\infty$, 或者

$$\limsup_{t\nearrow T^*}\mathcal{B}(t)=\infty,$$

或者

$$\int_0^{T^*}[\mathcal{A}(t)+\mathcal{A}^2(t)+\|\nabla q\|_{L^\infty(\partial\Omega)}+\|\nabla_N D_t q(t)\|_{L^\infty(\partial\Omega)}+\|\nabla_N D_t q\|^2_{L^\infty(\partial\Omega)}]dt=\infty.\tag{1.5}$$

特别地, 若 (1.5) 成立, 则有

$$\limsup_{t\nearrow T^*}[\mathcal{A}(t)+\|\nabla q\|_{L^\infty(\partial\Omega)}+\|\nabla_N D_t q(t)\|_{L^\infty(\partial\mathcal{D}_t)}]=\infty.$$

本文余下内容的结构如下. 第 2 节给出所需要的一些记号和估计. 第 3 节对能量进行估计. 第 4 节给出主要定理的证明.

2 一些记号和引理

本节给出文中用到的一些记号和估计, 如未特别说明, 均可参见文献 [3, 11].

首先, 给出 $\partial\mathcal{D}_t$ 所要满足的条件. 令 $d(x)=\mathrm{dist}(x,\partial\mathcal{D}_t)$, d_0 是一个比标准指数映射的单射半径 ι_0 小的固定常数, 而 ι_0 被定义为使得从 $\partial\mathcal{D}_t\times(-\iota_0,\iota_0)$ 到 $\{x\in\mathbb{R}^n:\mathrm{dist}(x,\partial\mathcal{D}_t)<\iota_0\}$ 的映射:

$$\partial\mathcal{D}_t\times(-\iota_0,\iota_0)\to\{x\in\mathbb{R}^3:\mathrm{dist}(x,\partial\mathcal{D}_t)<\iota_0\},$$
$$(\bar{x},\iota)\to x=\bar{x}+\iota n(\bar{x})$$

为单射的最大正数. 选取一个光滑截断函数 $\eta(d)\in[0,1]$ 使得

$$\text{当 } d<\frac{d_0}{4}\text{ 时},\quad \eta(d)=1;\quad \text{当 } d>\frac{d_0}{2}\text{ 时},\quad \eta(d)=0.$$

定义

$$\gamma^{ij}=\delta^{ij}-\eta(d)^2n^in^j,\quad n^i=-\delta^{ij}\partial_j d.$$

对于给定的 $0<\varepsilon_1<2$, 令 $\iota_1=\iota_1(\varepsilon_1)$ 为满足以下性质的最大的数: 当 $|\bar{x}_1-\bar{x}_2|\leqslant\iota_1$ 且 $\bar{x}_1,\bar{x}_2\in\partial\mathcal{D}_t$ 时, $|n(\bar{x}_1)-n(\bar{x}_2)|\leqslant\iota_1$ 成立.

本文要求 ι_0 和 ι_1 有下界, 特别地 $\iota_1 \geqslant 1/K_1$. 这是因为初始区域是单位球, 此时 ι_0 和 ι_1 是固定的常数, 在一段时间内对于光滑解而言它们显然有下界. 因为在文献 [12] 中允许去选取一个只依赖于初值条件的 K_1, 所以可以假定 K_1 是一个常数, 这并不会影响解的爆破.

一个 (r,s) 张量 S 在边界上的正交投影定义为

$$(\Pi S)^{a_1\cdots a_r}_{b_1\cdots b_s} = \gamma^{a_1}_{c_1}\cdots\gamma^{a_r}_{c_r}\gamma^{d_1}_{b_1}\cdots\gamma^{d_s}_{b_s}S^{c_1\cdots c_r}_{d_1\cdots d_s},$$

其中 $\gamma^c_a = \delta^c_a - N_aN^c$. 边界的第二基本形式为 $\theta_{ab} = (\Pi\nabla N)_{ab} = \gamma^c_a\nabla_cN_b$. 由于 $g^{ab} = \gamma^{ab} + N^aN^b$, 所以有如下性质:

$$\Pi(S\cdot R) = \Pi(S)\cdot\Pi(R) + \Pi(S\cdot N)\,\tilde{\otimes}\,\Pi(N\cdot R), \tag{2.1}$$

其中 $S\,\tilde{\otimes}\,R$ 代表张量积 $S\otimes R$ 的对称化. 类似地, $S\,\tilde{\cdot}\,R$ 表示点乘 $S\cdot R$ 的对称化.

引理 2.1 (参见文献 [3, 引理 5.5]) 设 $w_a = w_{Aa} = \nabla^r_A f_a$, $\nabla^r_A = \nabla_{a_1}\cdots\nabla_{a_r}$ 为 r 阶协变导数, f 是一个 $(0,1)$ 型张量. 又令 $\operatorname{div} w = \nabla_a w^a = \nabla^r \operatorname{div} f$, $(\operatorname{curl} w)_{ab} = \nabla_a w_b - \nabla_b w_a = \nabla^r(\operatorname{curl} f)_{ab}$. 则

$$|\nabla w|^2 \leqslant C(g^{ab}\gamma^{cd}\gamma^{AB}\nabla_c w_{Aa}\nabla_d w_{Bb} + |\operatorname{div} w|^2 + |\operatorname{curl} w|^2).$$

引理 2.2 (参见文献 [3, 引理 3.9]) 设 N 是 $\partial\Omega$ 的单位法向量, 在 $[0,T]\times\partial\Omega$ 上有 $h_{ab} = \frac{1}{2}D_tg_{ab}$, 则有

$$D_tN_a = h_{NN}N_a, \quad D_tN^c = -2h^c_dN^d + h_{NN}N^c, \quad D_t\gamma^{ab} = -2\gamma^{ac}h_{cd}\gamma^{db},$$

其中 $h_{NN} = h_{ab}N^aN^b$. $\partial\Omega$ 上的面积元 μ_γ 满足

$$D_td\mu_\gamma = (\operatorname{tr} h - h_{NN})d\mu_\gamma.$$

引理 2.3 (参见文献 [11, 引理 2.3]) 设 $T_{a_1\cdots a_r}$ 是一个 $(0,r)$ 型张量, 则有

$$[D_t,\nabla_a]T_{a_1\cdots a_r} = -(\nabla_{a_1}\nabla_a u^d)T_{da_2\cdots a_r} - \cdots - (\nabla_{a_r}\nabla_a u^d)T_{a_1\cdots a_{r-1}d}.$$

如果 $\Delta = g^{cd}\nabla_c\nabla_d$ 且 q 是一个函数, 则

$$[D_t, g^{ab}\nabla_a]T_b = -2h^{ab}\nabla_aT_b - (\Delta u^e)T_e, \quad [D_t,\nabla]q = 0, \quad [D_t,\Delta]q = -2h^{ab}\nabla_a\nabla_bq - (\Delta u^e)\nabla_eq.$$

更进一步地,

$$[D_t,\nabla^r]q = -\sum_{s=1}^{r-1}C^{s+1}_r(\nabla^{s+1}u)\cdot\nabla^{r-s}q,$$

其中对称点乘用分量的方式定义如下:

$$((\nabla^{s+1}u)\cdot\nabla^{r-s}q)_{a_1\cdots a_r} = \frac{1}{r!}\sum_{\sigma\in\Sigma_r}(\nabla^{s+1}_{a_{\sigma_1}\cdots a_{\sigma_{s+1}}}u^d)\nabla^r_d a^{r-s}_{\sigma_{s+2}\cdots a_{\sigma_r}}q.$$

引理 2.4 (参见文献 [8, 引理 9]) 记 $\bar{\nabla} = \Pi\nabla = \gamma^b_a\nabla_b$ 为 ∇ 在边界 $\partial\Omega$ 上的投影, 则有以下的插值不等式:

假定

$$\frac{m}{s}=\frac{k}{p}+\frac{m-k}{q},\quad 2\leqslant p\leqslant s\leqslant q\leqslant\infty,$$

且 $a=k/m$, 则存在只依赖于 m 的常数 C, 使得对于任意 $(0,r)$ 型张量 α 有不等式

$$\|\bar{\nabla}^k\alpha\|_{L^s(\partial\Omega)}\leqslant C\|\alpha\|_{L^q(\partial\Omega)}^{1-a}\|\bar{\nabla}^m\alpha\|_{L^p(\partial\Omega)}^a.$$

更进一步地, 若 $\iota_0\geqslant\frac{1}{K}$, 则

$$\sum_{j=0}^k\|\nabla^j\alpha\|_{L^s(\Omega)}\leqslant C\|\alpha\|_{L^q(\Omega)}^{1-a}\left(\sum_{i=0}^m\|\nabla^i\alpha\|_{L^p(\Omega)}K^{m-i}\right)^a.$$

特别地, 若 $\ell+m=k$, 则

$$\|\bar{\nabla}^\ell\alpha\bar{\nabla}^m\beta\|_{L^2(\partial\Omega)}\leqslant C\left(\|\alpha\|_{L^\infty(\partial\Omega)}\sum_{\ell=0}^k\|\bar{\nabla}^\ell\beta\|_{L^2(\partial\Omega)}+\|\beta\|_{L^\infty(\partial\Omega)}\sum_{\ell=0}^k\|\bar{\nabla}^\ell\alpha\|_{L^2(\partial\Omega)}\right),$$

$$\|\nabla^\ell\alpha\nabla^m\beta\|_{L^2(\Omega)}\leqslant C\left(\|\alpha\|_{L^\infty(\Omega)}\sum_{\ell=0}^k\|\nabla^\ell\beta\|_{L^2(\Omega)}+\|\beta\|_{L^\infty(\Omega)}\sum_{\ell=0}^k\|\nabla^\ell\alpha\|_{L^2(\Omega)}\right).$$

引理 2.5 (参见文献 [11, 引理 A.3]) ι_0 和 ι_1 如之前定义, 假定 $|\theta|+1/\iota_0\leqslant K$ 以及 $1/\iota_1\leqslant K_1$, 则对 $\tilde{K}=\min(K,K_1)$、任意 $r\geqslant 2$ 以及 $\delta>0$, 有

$$\|\nabla^r q\|_{L^2(\partial\Omega)}+\|\nabla^r q\|_{L^2(\Omega)}\leqslant C\|\Pi\nabla^r q\|_{L^2(\partial\Omega)}+C(\tilde{K},\mathrm{Vol}\,\Omega)\sum_{s\leqslant r-1}\|\nabla^s\Delta q\|_{L^2(\Omega)},$$

$$\|\nabla^{r-1}q\|_{L^2(\partial\Omega)}+\|\nabla^r q\|_{L^2(\Omega)}\leqslant\delta\|\Pi\nabla^r q\|_{L^2(\partial\Omega)}+C(1/\delta,K,\mathrm{Vol}\,\Omega)\sum_{s\leqslant r-2}\|\nabla^s\Delta q\|_{L^2(\Omega)}.$$

引理 2.6 (参见文献 [11, 引理 A.9]) 假定 $\iota_1\geqslant 1/K_1$, α 是一个 $(0,r)$ 型张量, 则有

$$\|\alpha\|_{L^{np/(n-kp)}(\Omega)}\leqslant C\sum_{\ell=0}^k\|\nabla^\ell\alpha\|_{L^p(\Omega)},\quad 1\leqslant p<\frac{n}{k},\tag{2.2}$$

$$\|\alpha\|_{L^\infty(\Omega)}\leqslant C\sum_{\ell=0}^k\|\nabla^\ell\alpha\|_{L^p(\Omega)},\quad k>\frac{n}{p}.\tag{2.3}$$

引理 2.7 (参见文献 [11, 引理 A.10]) 假设在 $\partial\Omega$ 上 $q=0$, 则

$$\|q\|_{L^2(\Omega)}\leqslant C(\mathrm{Vol}\,\Omega)^{1/n}\|\nabla q\|_{L^2(\Omega)},\quad \|\nabla q\|_{L^2(\Omega)}\leqslant C(\mathrm{Vol}\,\Omega)^{1/2n}\|\Delta q\|_{L^2(\Omega)}.$$

引理 2.8 (参见文献 [11, 引理 A.4]) 假设 $2\leqslant r\leqslant 4$, $|\theta|\leqslant K$, $\iota_1\geqslant 1/K_1$. 若在 $\partial\Omega$ 上 $q=0$, 则

$$\|\Pi\nabla^r q\|_{L^2(\partial\Omega)}\leqslant\ 2\|\bar{\nabla}^{r-2}\theta\|_{L^2(\partial\Omega)}\|\nabla_N q\|_{L^\infty(\partial\Omega)}+C\sum_{k=1}^{r-1}\|\theta\|_{L^\infty(\partial\Omega)}^k\|\nabla^{r-k}q\|_{L^2(\partial\Omega)}.$$

更进一步地, 如果 $|\nabla_N q|\geqslant\varepsilon>0$ 以及 $|\nabla_N q|\geqslant 2\varepsilon\|\nabla_N q\|_{L^\infty(\partial\Omega)}$, 则

$$\|\bar{\nabla}^{r-2}\theta\|_{L^2(\partial\Omega)}\leqslant\ C\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)\left(\|\Pi\nabla^r q\|_{L^2(\partial\Omega)}+\sum_{k=1}^{r-1}\|\theta\|_{L^\infty(\partial\Omega)}^k\|\nabla^{r-k}q\|_{L^2(\partial\Omega)}\right).$$

引理 2.9 (参见文献 [11, 引理 A.5])　假设 $r \in \{3,4\}$ 以及 $|\theta|+1/\iota_0 \leqslant K$. 若在 $\partial\Omega$ 上 $q=0$, 则有

$$\|\nabla^{r-1}q\|_{L^2(\partial\Omega)} \leqslant C(\|\bar{\nabla}^{r-3}\theta\|_{L^2(\partial\Omega)}\|\nabla_N q\|_{L^\infty(\partial\Omega)} + \|\nabla^{r-2}\Delta q\|_{L^2(\Omega)}) + C(K, \operatorname{Vol}\Omega, \|\theta\|_{L^2(\partial\Omega)})\bigg(\|\nabla_N q\|_{L^\infty(\partial\Omega)} + \sum_{s=0}^{r-3}\|\nabla^s\Delta q\|_{L^2(\Omega)}\bigg).$$

众所周知, 为了得到爆破准则, 需要一个关于速度场和弹性张量的 “log 型” 不等式. 在自由边界上, 这个问题很难解决是因为并不知道速度场在移动的边界 $\partial\mathcal{D}_t$ 及 $\partial\Omega$ 上的值. 因此, 本文引入 Dirichlet-Neumann 算子 $\mathcal{N}$ 来处理边界上速度场的问题. 而对于弹性张量, 因为有边界条件 $\mathcal{N}\cdot\mathbb{F}^\top|_{\partial\Omega}=0$, 所以可以使用文献 [2] 中的结论.

由上面的思路, 将速度场拆成两部分 $u=u_1+u_2$:

$$\begin{cases} \Delta u_1 = \nabla\times\nabla\times u & \text{在 } \Omega \text{ 中}, \\ u_1 = 0 & \text{在 } \partial\Omega \text{ 上}, \end{cases} \tag{2.4}$$

$$\begin{cases} \Delta u_2 = 0 & \text{在 } \Omega \text{ 中}, \\ u_2 = u & \text{在 } \partial\Omega \text{ 上}. \end{cases} \tag{2.5}$$

以下都是需要用到的估计.

引理 2.10 (参见文献 [7, 命题 2.1])　设 $\Omega\subset\mathbb{R}^3$ 是一个微分同胚于单位球的区域, 且在 $\partial\Omega$ 上有 $|\theta|+\frac{1}{\iota_0}\leqslant K$, 对于 $1<p<\infty$, 有如下结论成立:

(i) 对于任意 $q\in H^{2,p}(\Omega)\cap H_0^{1,p}(\Omega)$, 有

$$\|q\|_{L^p(\Omega)} + \|\nabla q\|_{L^p(\Omega)} + \|\nabla^2 q\|_{L^p(\Omega)} \leqslant C(K)\|\Delta q\|_{L^p(\Omega)};$$

(ii) 假如对向量场 f、g 和 $\rho\in H_0^{1,p}(\Omega)$ 有关系 $\Delta f=\nabla\times g+\rho$, 则

$$\|\nabla f\|_{L^p(\Omega)} \leqslant C(K)(\|g\|_{L^p(\Omega)} + \|\rho\|_{L^1(\Omega)});$$

(iii) 设 $1<p<\infty$, $u\in H^{1,p}(\Omega)$ 且在迹的意义下在 $\partial\Omega$ 上 $u\cdot N=0$, 则

$$\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)} \leqslant C(K)(\|\operatorname{div} u\|_{L^p(\Omega)} + \|\nabla\times u\|_{L^p(\Omega)})$$

成立当且仅当 Ω 是单位球.

因为 u_2 调和, 所以由极大值原理知 $\|\nabla u_2\|_{L^\infty(\Omega)}\leqslant\|\nabla u_2\|_{L^\infty(\partial\Omega)}$. 由 (2.4)、引理 2.10 和 $u=u_1+u_2$, 使用 Hölder 不等式, 对于 $1<p<\infty$, 可以得到

$$\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)} \leqslant C(K,\operatorname{Vol}(\Omega))(\|\nabla\times u\|_{L^\infty(\Omega)} + \|\bar{\nabla}U\|_{L^\infty(\partial\Omega)} + \|\mathcal{N}U\|_{L^\infty(\partial\Omega)}) \leqslant C(K,\operatorname{Vol}(\Omega))\mathcal{A}. \tag{2.6}$$

类似地, 由 $N\cdot\mathbb{F}^\top|_{\partial\Omega}=0$, 对 $\mathbb{F}$ 的各个分量应用引理 2.10, 得到

$$\|\nabla\mathbb{F}\|_{L^p(\Omega)} \leqslant C(K,\operatorname{Vol}(\Omega))\|\nabla\times\mathbb{F}\|_{L^\infty(\Omega)} \leqslant C(K,\operatorname{Vol}(\Omega))\mathcal{A}. \tag{2.7}$$

因为 Ω 是单位球, 所以可以利用文献 [6] 中的椭圆型估计:

引理 2.11 (参见文献 [6, 命题 1 和推论 1]) 设 $F=F(t,x)$ 为定义在 Ω 内的光滑向量场, 且满足以下条件:

$$\begin{aligned} \nabla\cdot F=0 \quad & \text{在 } \Omega \text{ 内}, \\ F\cdot n=0 \quad & \text{在 } \partial\Omega \text{ 上}, \end{aligned}$$

则对于任意 $s\geqslant 3$, 都有

$$\|F(t)\|_{H^{1,\infty}(\Omega)}\leqslant C((1+\log^{+}\|\nabla\times F(t)\|_{H^{s-1}(\Omega)})\|\nabla\times F(t)\|_{L^\infty(\Omega)}+1),$$

其中 $\log^{+}f=\max(0,\log f)$.

3 能量估计

记 μ_g 为 Ω 上的体积元 (参见文献 [3]). 由文献 [12] 知, 守恒能量为

$$E_0(t)=\frac{1}{2}\int_\Omega(|u(t,y)|^2+|\mathbb{F}(t,y)|^2)d\mu_g.$$

对于整数 $1\leqslant r\leqslant 4$, 令

$$\mathcal{K}_r(t):=\int_\Omega|\nabla^{r-1}\operatorname{curl}u|^2d\mu_g+\int_\Omega|\nabla^{r-1}\operatorname{curl}\mathbb{F}^\top|^2d\mu_g$$

和

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_r(t):=&\int_\Omega g^{bd}\gamma^{af}\gamma^{AF}\nabla_A^{r-1}\nabla_a u_b\nabla_F^{r-1}\nabla_f u_d d\mu_g+\int_\Omega g^{bd}g^{ce}\gamma^{af}\gamma^{AF}\nabla_A^{r-1}\nabla_a\mathbb{F}_{bc}\nabla_F^{r-1}\nabla_f\mathbb{F}_{de}d\mu_g\\ &+\operatorname{sgn}(r-1)\int_{\partial\Omega}\gamma^{af}\gamma^{AF}\nabla_A^{r-1}\nabla_a q\nabla_F^{r-1}\nabla_f q\vartheta d\mu_\gamma,\end{aligned}$$

其中, $\vartheta=1/(-\nabla_N q)$, $\operatorname{sgn}(s)$ 为实数 s 的符号函数, $\operatorname{curl}\mathbb{F}^\top:=\nabla\times\mathbb{F}^\top$.

定义 r 阶能量为

$$E_r(t)=\mathcal{E}_r(t)+\mathcal{K}_r(t).$$

由 (1.4) 得

$$\Delta q=-\nabla_a u^b\nabla_b u^a+g^{cb}\nabla_a\mathbb{F}_{cd}\nabla_b\mathbb{F}^{ad}. \tag{3.1}$$

首先给出 q 和 θ 的估计:

命题 3.1 假定 $|\theta|+1/\iota_0\leqslant K$, 则对于 $2\leqslant r\leqslant 4$, 有

$$\|\Pi\nabla^r q\|_{L^2(\partial\Omega)}^2\leqslant\|\nabla q\|_{L^\infty(\partial\Omega)}E_r, \tag{3.2a}$$

$$\|\nabla^r q\|_{L^2(\partial\Omega)}^2+\|\nabla^r q\|_{L^2(\Omega)}^2\leqslant C(K)(\|\nabla q\|_{L^\infty(\partial\Omega)}+\|\nabla u\|_{L^\infty(\Omega)}^2+\|\nabla\mathbb{F}\|_{L^\infty(\Omega)}^2)\sum_{s=0}^r E_s. \tag{3.2b}$$

进一步地,

$$\|\theta\|_{L^2(\partial\Omega)}^2\leqslant C(\varepsilon^{-1})E_2, \tag{3.3a}$$

$$\|\bar\nabla^{r-2}\theta\|_{L^2(\partial\Omega)}^2\leqslant C(K,\varepsilon^{-1},\operatorname{Vol}\Omega)(\|\nabla q\|_{L^\infty(\partial\Omega)}+\|\nabla u\|_{L^\infty(\Omega)}^2+\|\nabla\mathbb{F}\|_{L^\infty(\Omega)}^2)\sum_{s=0}^r E_s. \tag{3.3b}$$

证明　由定义可知

$$\|\Pi\nabla^r q\|^2_{L^2(\partial\Omega)} = \int_{\partial\Omega} \gamma^{ij}\gamma^{IJ}\nabla_I^{\gamma-1}\nabla_i q\nabla_J^{\gamma-1}\nabla_j q\vartheta\cdot(-\nabla_N q)d\mu_\gamma \leqslant \|\nabla q\|_{L^\infty(\partial\Omega)}E_r.$$

故 (3.2a) 成立. 由引理 2.5 得

$$\begin{aligned}\|\nabla^r q\|^2_{L^2(\partial\Omega)} + \|\nabla^r q\|^2_{L^2(\Omega)} &\leqslant C\|\Pi\nabla^r q\|^2_{L^2(\partial\Omega)} + C(K,\mathrm{Vol}(\Omega))\sum_{s=0}^{r-1}\|\nabla^s\Delta p\|^2_{L^2(\Omega)}\\ &\leqslant C\|\nabla q\|_{L^\infty(\partial\Omega)}E_r + C(K,\mathrm{Vol}(\Omega))\sum_{s=0}^{r-1}\|\nabla^s\Delta q\|^2_{L^2(\Omega)}.\end{aligned}$$

由 (3.1) 可得

$$\nabla^s\Delta q = -\sum_{m=0}^{s} C_s^m(\nabla^m\nabla_a u^b\nabla^{s-m}\nabla_b u^a - g^{cb}\nabla^m\nabla_a\mathbb{F}_{cd}\nabla^{s-m}\nabla_b\mathbb{F}^{ad}).$$

因此, 由引理 2.4 可知

$$\|\nabla^s\Delta q\|_{L^2(\Omega)} \leqslant C(K)(\|\nabla u\|_{L^\infty(\Omega)} + \|\nabla\mathbb{F}\|_{L^\infty(\Omega)})\bigg(\sum_{k=0}^{s+1}\|\nabla^k u\|_{L^2(\Omega)} + \sum_{k=0}^{s+1}\|\nabla^k\mathbb{F}\|_{L^2(\Omega)}\bigg),$$

从而 (3.2b) 成立.

由文献 [12] 和 $\Pi\nabla^2 p = \theta\nabla_N p$ 可得 $\|\theta\|_{L^2(\partial\Omega)} \leqslant C(\varepsilon^{-1})E_2^{1/2}$, 从而 (3.3a) 成立. 对于 (3.3b), 由引理 2.8 和 (3.2b), 得到

$$\begin{aligned}\|\bar\nabla^{r-2}\theta\|_{L^2(\partial\Omega)} &\leqslant C\bigg(\|\Pi\nabla^r q\|_{L^2(\partial\Omega)} + \sum_{k=1}^{r-1}\|\theta\|^k_{L^\infty(\partial\Omega)}\|\nabla^{r-k}q\|_{L^2(\partial\Omega)}\bigg)\\ &\leqslant C(K,\varepsilon^{-1})(\|\nabla q\|^{1/2}_{L^\infty(\partial\Omega)} + \|\nabla u\|_{L^\infty(\Omega)} + \|\nabla\mathbb{F}\|_{L^\infty(\Omega)})\sum_{k=0}^{r}E_k^{1/2}.\end{aligned}$$

□

为了方便, 记

$$I_1 := (\|\nabla q\|^{1/2}_{L^\infty(\partial\Omega)} + \|\nabla u\|_{L^\infty(\Omega)} + \|\nabla\mathbb{F}\|_{L^\infty(\Omega)})(1+\mathcal{A}+\|\nabla q\|^{1/2}_{L^\infty(\partial\Omega)} + \|\nabla_N D_t q\|_{L^\infty(\partial\Omega)}) + \mathcal{A}^2.$$

我们有以下估计:

命题 3.2　假设在 $\partial\Omega$ 上有 $|\theta| + \frac{1}{\iota_0} \leqslant K$ 和 $|\nabla p| \geqslant \varepsilon > 0$, 则对于 $r = 1,2,3$, 有

$$\frac{d}{dt}E_r \leqslant C(K,\varepsilon^{-1})I_1\sum_{s=0}^{r}E_s(t);$$

对于 $r = 4$, 有

$$\frac{d}{dt}E_4 \leqslant C(K,\varepsilon^{-1})I_1\bigg(1+\sum_{s=0}^{3}E_s(t)\bigg)(1+E_4(t)).$$

证明　由文献 [12] 和 Hölder 不等式, 可得

$$\frac{d}{dt}E_1(t) \leqslant C(K)(\|\nabla u\|_{L^\infty(\Omega)} + \|\nabla\mathbb{F}\|_{L^\infty(\Omega)})(E_0+E_1).$$

首先, 计算 $\mathcal{E}_r(t)$ 关于 t 的导数如下:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\mathcal{E}_r(t) = &\int_\Omega D_t(g^{bd}\gamma^{af}\gamma^{AF}\nabla_A^{r-1}\nabla_a u_b\nabla_F^{r-1}\nabla_f u_d)d\mu_g\\&+\int_\Omega D_t(g^{bd}g^{ce}\gamma^{af}\gamma^{AF}\nabla_A^{r-1}\nabla_a\mathbb{F}_{bc}\nabla_F^{r-1}\nabla_f\mathbb{F}_{de})d\mu_g\\&+\int_{\partial\Omega} D_t(\gamma^{af}\gamma^{AF}\nabla_A^{r-1}\nabla_a q\nabla_F^{r-1}\nabla_f q)\vartheta d\mu_\gamma\\&+\int_{\partial\Omega}\gamma^{af}\gamma^{AF}\nabla_A^{r-1}\nabla_a q\nabla_F^{r-1}\nabla_f q\left(\frac{\vartheta_t}{\vartheta}-h_{NN}\right)\vartheta d\mu_\gamma,\end{aligned}\tag{3.4}$$

其中 h_{NN} 如引理 2.2 中所定义. 由文献 [12] 以及在 $\partial\Omega$ 上 $N^a\mathbb{F}_{ab}=0$, 可得

$$\begin{aligned}&\int_\Omega[D_t(g^{bd}\gamma^{af}\gamma^{AF}\nabla_A^{r-1}\nabla_a u_b\nabla_F^{r-1}\nabla_f u_d)+D_t(g^{bd}\gamma^{af}\gamma^{AF}\nabla_A^{r-1}\nabla_a\mathbb{F}_{bc}\nabla_F^{r-1}\nabla_f\mathbb{F}_{de})]d\mu_g\\&\quad+\int_{\partial\Omega} D_t(\gamma^{af}\gamma^{AF}\nabla_A^{r-1}\nabla_a q\nabla_F^{r-1}\nabla_f q)\vartheta d\mu_\gamma\\&\quad\leqslant C(\|\nabla u\|_{L^\infty(\Omega)}+\|\nabla\mathbb{F}\|_{L^\infty(\Omega)})E_r(t)+CKE_r^{1/2}(t)\|\nabla^r q\|_{L^2(\Omega)}+CK\|\mathbb{F}\|_{L^\infty(\Omega)}E_r(t)\\&\qquad+CE_r^{1/2}(t)\sum_{s=1}^{r-2}(\|\nabla^{s+1}\mathbb{F}(\nabla^{r-s}u+\nabla^{r-s}\mathbb{F})\|_{L^2(\Omega)}+\|\nabla^{s+1}u(\nabla^{r-s}u+\nabla^{r-s}\mathbb{F})\|_{L^2(\Omega)})\\&\qquad+2\int_{\partial\Omega}\gamma^{af}\gamma^{AF}\nabla_{Aa}^r q\left(D_t\nabla_{Ff}^r q-\frac{1}{\vartheta}N_b\nabla_{Ff}^r u^b\right)\vartheta d\mu_\gamma.\end{aligned}\tag{3.5}$$

对于 (3.5) 中不等号右端第一行, 由命题 3.1, 当 $2\leqslant r\leqslant 4$ 时, 有

$$\|\nabla^r q\|_{L^2(\Omega)}\leqslant C(K,\varepsilon^{-1})(\|\nabla q\|_{L^\infty(\partial\Omega)}^{1/2}+\|\nabla u\|_{L^\infty(\Omega)}+\|\nabla\mathbb{F}\|_{L^\infty(\Omega)})\sum_{s=0}^r E_s^{1/2}.\tag{3.6}$$

对于 (3.5) 中不等号右端第二行, 运用引理 2.4 中的插值不等式可得

$$\|\nabla^{s+1}f\nabla^{r-s}g\|_{L^2(\Omega)}\leqslant C\|\nabla f\|_{L^\infty(\Omega)}\sum_{s=1}^r\|\nabla^s g\|_{L^2(\Omega)}+\|\nabla g\|_{L^\infty(\Omega)}\sum_{s=1}^r\|\nabla^s f\|_{L^2(\Omega)}.$$

对于 (3.5) 中最后一个积分, 由 Hölder 不等式和 $-\vartheta^{-1}N_b=\nabla_b q$, 可以得到

$$\begin{aligned}&\left|\int_{\partial\Omega}\gamma^{af}\gamma^{AF}\nabla_{Aa}^r q\left(D_t\nabla_{Ff}^r q-\frac{1}{\vartheta}N_b\nabla_{Ff}^r u^b\right)\vartheta d\mu_\gamma\right|\\&\quad\leqslant C\|\vartheta\|_{L^\infty(\partial\Omega)}^{1/2}E_r^{1/2}(t)\|\Pi(D_t(\nabla^r q)+\nabla^r u\cdot\nabla q)\|_{L^2(\partial\Omega)}.\end{aligned}\tag{3.7}$$

由引理 2.3, 有

$$D_t\nabla^r q+\nabla^r u\cdot\nabla q=\operatorname{sgn}(2-r)\sum_{s=1}^{r-2}C_r^{s+1}(\nabla^{s+1}u)\cdot\nabla^{r-s}q+\nabla^r D_t q.$$

接下来估计 $\|\Pi\nabla^r D_t q\|_{L^2(\partial\Omega)}$. 对于 $r=2$ 的情形, 由命题 3.1, 可得

$$\|\Pi\nabla^2 D_t q\|_{L^2(\partial\Omega)}\leqslant\|\theta\|_{L^2(\partial\Omega)}\|\nabla_N D_t q\|_{L^\infty(\partial\Omega)}\leqslant C(\varepsilon^{-1})E_2^{1/2}\|\nabla_N D_t q\|_{L^\infty(\partial\Omega)}.$$

对于 $r=3$, 由引理 2.8, 可得

$$\|\Pi\nabla^3 D_t q\|_{L^2(\partial\Omega)}\leqslant C(K)(\|\bar\nabla\theta\|_{L^2(\partial\Omega)}\|\nabla_N D_t q\|_{L^\infty(\partial\Omega)}+\|\nabla D_t q\|_{L^2(\partial\Omega)}+\|\nabla^2 D_t q\|_{L^2(\partial\Omega)}).$$

应用引理 2.9, 可得

$$\|\nabla D_t q\|_{L^2(\partial\Omega)} \leqslant C(K, \mathrm{Vol}(\Omega))\|\Delta D_t q\|_{L^2(\Omega)}.$$

由引理 2.9 和命题 3.1, 得到

$$\|\nabla^2 D_t q\|_{L^2(\partial\Omega)} \leqslant C(K, \mathrm{Vol}(\Omega))(\|\theta\|_{L^2(\partial\Omega)}\|\nabla_N D_t q\|_{L^\infty(\partial\Omega)} + \|\Delta D_t q\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla\Delta D_t q\|_{L^2(\Omega)}).$$

当 $r=4$ 时, $\|\Pi\nabla^4 D_t q\|_{L^2(\partial\Omega)}$ 的估计中类似地会出现 $\|\nabla^2\Delta D_t q\|_{L^2(\Omega)}$ 及其低阶项. 因此, 对于 $r=3,4$, 需要估计

$$\sum_{s=0}^{r-2}\|\nabla^s\Delta D_t q\|_{L^2(\Omega)}.$$

由引理 2.3 和 (3.1), 计算可得

$$\begin{aligned}\Delta D_t q ={}& 2g^{ac}\nabla_c u^b\nabla_a\nabla_b q + (\Delta u^e)\nabla_e q + 2\nabla_e\nabla_b u^a\nabla_a u^e - 2g^{ce}\nabla_e u^b\nabla_a\mathbb{F}^{cd}\nabla_b\mathbb{F}^{ad} - 2\nabla_d u_f\nabla_a\mathbb{F}^{bd}\nabla_b\mathbb{F}^{af}\\ &+ 2g^{ce}\nabla_c\mathbb{F}^{ad}\nabla_a\mathbb{F}_{eb}\nabla_d u^b - 2g^{bd}\nabla_b u^a\nabla_a\nabla_c\mathbb{F}_{de}\mathbb{F}^{ce} + 2g^{ce}\nabla_b\mathbb{F}^{ad}\mathbb{F}_{ed}\nabla_a\nabla_c u^b.\end{aligned}$$

当 $r=3$ 时, $s\in\{0,1\}$, 需估计形如

$$\begin{aligned}&\nabla u\nabla^2 q, \nabla^2 u\nabla q, \nabla^2 u\nabla u, \nabla u\nabla\mathbb{F}\nabla\mathbb{F}, \nabla u\nabla^2\mathbb{F}\mathbb{F}, \nabla^2 u\nabla\mathbb{F}\mathbb{F}; \nabla u\nabla^3 q, \nabla^2 u\nabla^2 q, \nabla^3 u\nabla q,\\ &\nabla^3 u\nabla u, \nabla^2 u\nabla^2 u, \nabla^2 u\nabla\mathbb{F}\nabla\mathbb{F}, \nabla u\nabla^2\mathbb{F}\nabla\mathbb{F}, \nabla^2 u\nabla^2\mathbb{F}\mathbb{F}, \nabla u\nabla^3\mathbb{F}\mathbb{F}, \nabla^3 u\nabla\mathbb{F}\mathbb{F}\end{aligned}$$

的 $L^2(\Omega)$ 估计. 当 $r=4$ 时, $s\in\{0,1,2\}$, 除上述形式外, 还需估计形如 ($s=2$ 时)

$$\begin{aligned}&\nabla^4 u\nabla q, \nabla^3 u\nabla^2 q, \nabla^2 u\nabla^3 q, \nabla u\nabla^4 q, \nabla^4 u\nabla u, \nabla^3 u\nabla^2 u, \nabla^4 u\nabla\mathbb{F}\mathbb{F}, \nabla^3 u\nabla\mathbb{F}\nabla\mathbb{F},\\ &\nabla^3 u\nabla^2\mathbb{F}\mathbb{F}, \nabla^2 u\nabla^2\mathbb{F}\nabla\mathbb{F}, \nabla^2 u\nabla^3\mathbb{F}\mathbb{F}, \nabla u\nabla^4\mathbb{F}\mathbb{F}, \nabla u\nabla^3\mathbb{F}\nabla\mathbb{F}, \nabla u\nabla^2\mathbb{F}\nabla^2\mathbb{F}\end{aligned}$$

的 $L^2(\Omega)$ 估计.

注意到 I_1 和 $\mathcal{A}$ 中包含 $\|\nabla u\|_{L^\infty(\Omega)}$ 和 $\|\nabla\mathbb{F}\|_{L^\infty(\Omega)}$. 另外, 由引理 2.6、Sobolev 不等式以及 $E_0(t)$ 是守恒量, 可以得到

$$\begin{aligned}\|\mathbb{F}\|_{L^\infty(\Omega)} &\leqslant \|\mathbb{F}\|_{L^4(\Omega)} + \|\nabla\mathbb{F}\|_{L^4(\Omega)}\\ &\leqslant C(K, \mathrm{Vol}\,\Omega)(\|\mathbb{F}\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla\mathbb{F}\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla\mathbb{F}\|_{L^4(\Omega)})\\ &\leqslant C(K, \mathrm{Vol}\,\Omega)(1+\mathcal{A}). \end{aligned}\tag{3.8}$$

现在估计 $\|\nabla q\|_{L^\infty(\Omega)}$. 由 Sobolev 嵌入 ((2.3) 中取 $p=4$) 以及 (2.6)、(2.7)、引理 2.10 和 (3.1), 得到

$$\begin{aligned}\|\nabla q\|_{L^\infty(\Omega)} &\leqslant C(K)(\|\nabla q\|_{L^4(\Omega)} + \|\nabla^2 q\|_{L^4(\Omega)}) \leqslant C(K)\|\Delta q\|_{L^4(\Omega)}\\ &\leqslant C(K)(\|\nabla u\|_{L^\infty(\Omega)}\|\nabla u\|_{L^4(\Omega)} + \|\nabla\mathbb{F}\|_{L^\infty(\Omega)}\|\nabla\mathbb{F}\|_{L^4(\Omega)})\\ &\leqslant C(K, \mathrm{Vol}(\Omega))(\|\nabla u\|_{L^\infty(\Omega)} + \|\nabla\mathbb{F}\|_{L^\infty(\Omega)})\mathcal{A}.\end{aligned}$$

同时 (2.3) 中取 $p=2$, 由命题 3.1, 可得

$$\|\nabla q\|^2_{L^\infty(\Omega)} \leqslant C(K, \mathrm{Vol}(\Omega))\sum_{k=1}^{3}\|\nabla^k q\|^2_{L^2(\Omega)}$$

$$\leqslant C(K,\mathrm{Vol}(\Omega))(\|\nabla q\|_{L^\infty(\partial\Omega)}+\|\nabla u\|^2_{L^\infty(\Omega)}+\|\nabla\mathbb{F}\|^2_{L^\infty(\Omega)})\sum_{s=0}^{3}E_s. \tag{3.9}$$

含有 ∇q 或 ∇u 的项中的 $\nabla^r u$ 和 $\nabla^{r-1}u$ 的 $L^2(\Omega)$ 范数可以分别被 $E_r^{1/2}$ 和 $E_{r-1}^{1/2}$ 控制, 含有 ∇u 的项中的 $\nabla^r\mathbb{F}$ 和 $\nabla^{r-1}\mathbb{F}$ 的 $L^2(\Omega)$ 范数同样可以分别被 $E_r^{1/2}$ 和 $E_{r-1}^{1/2}$ 控制. $\|\nabla^s q\|_{L^2(\Omega)}$ $(s\in\{2,3,4\})$ 的估计见 (3.6). 如此, 只需估计剩余的形如

$$\begin{aligned}
&r=3: \quad \nabla^2u\nabla^2q, \nabla^2u\nabla^2u, \nabla^2u\nabla^2\mathbb{F},\\
&r=4: \quad \nabla^3u\nabla^2q, \nabla^2u\nabla^3q, \nabla^3u\nabla^2u, \nabla^3u\nabla^2\mathbb{F}, \nabla^2u\nabla^3\mathbb{F}, \nabla^2u\nabla^2\mathbb{F}, \nabla^2\mathbb{F}\nabla^2\mathbb{F}
\end{aligned}$$

的 $L^2(\Omega)$ 估计.

接下来, 考虑 $\|(\nabla^{1+s}u)(\nabla^{r-s}q)\|_{L^2(\Omega)}$ $(1\leqslant s\leqslant r-2,\ r\in\{3,4\})$. 由引理 2.4 和 2.6, 对于 $f=u$ 或者 $\mathbb{F}$, 有 (对 $\mathbb{F}$ 考虑分量即可)

$$\|\nabla^{s+1}f\|_{L^4(\Omega)}\leqslant C\|\nabla^s f\|^{1/2}_{L^\infty(\Omega)}\bigg(\sum_{\ell=0}^{2}\|\nabla^{s+\ell}f\|_{L^2(\Omega)}\bigg)^{1/2}\leqslant C(K)\sum_{\ell=0}^{2}E^{1/2}_{s+\ell}(t). \tag{3.10}$$

由引理 2.10、(2.6)、(2.7) 和 (3.10), 可得

$$\begin{aligned}
\|\nabla^2u\nabla^2q\|_{L^2(\Omega)}&\leqslant\|\nabla^2u\|_{L^4(\Omega)}\|\nabla^2q\|_{L^4(\Omega)}\\
&\leqslant C(\|\nabla^s\nabla_a u^b\nabla^{r-1-s}\nabla_b u^a\|_{L^4(\Omega)}+\|g^{cb}\nabla^s\nabla_a\mathbb{F}_{cd}\nabla^{r-1-s}\nabla_b\mathbb{F}^{ad}\|_{L^4(\Omega)})\\
&\leqslant C(K)\|\nabla u\|_{L^\infty(\Omega)}\mathcal{A}\bigg(\sum_{s=0}^{3}E_s^{1/2}(t)\bigg).
\end{aligned}$$

由引理 2.4、2.7、命题 3.1、(3.9) 和 Hölder 不等式, 对于 $r=4$, 可得

$$\begin{aligned}
\|(\nabla^{1+s}u)(\nabla^{4-s}q)\|_{L^2(\Omega)}&\leqslant\|\nabla u\|_{L^\infty(\Omega)}\sum_{k=1}^{4}\|\nabla^k q\|_{L^2(\Omega)}+\|\nabla q\|_{L^\infty(\Omega)}\sum_{k=1}^{4}\|\nabla^k u\|_{L^2(\Omega)}\\
&\leqslant C(K,\varepsilon^{-1})(\|\nabla q\|^{1/2}_{L^\infty(\partial\Omega)}+\|\nabla u\|_{L^\infty(\Omega)}+\|\nabla\mathbb{F}\|_{L^\infty(\Omega)})\sum_{s=0}^{3}E_s^{1/2}\sum_{k=0}^{4}E_k^{1/2}.
\end{aligned}$$

对于 $r\in\{3,4\}$, 由 (2.6)、(3.10) 和 (3.8) 可得

$$\begin{aligned}
\|\nabla^2u\nabla^2\mathbb{F}\|_{L^2(\Omega)}&\leqslant C(K)\|\nabla^2u\|_{L^4(\Omega)}\|\nabla^2\mathbb{F}\|_{L^4(\Omega)}\\
&\leqslant C(K)\|\nabla\mathbb{F}\|^{1/2}_{L^\infty(\Omega)}\|\nabla u\|^{1/2}_{L^\infty(\Omega)}\sum_{s=0}^{3}E_s^{1/2}\\
&\leqslant C(K)(\|\nabla\mathbb{F}\|_{L^\infty(\Omega)}+\|\nabla u\|_{L^\infty(\Omega)})\sum_{s=0}^{3}E_s^{1/2}.
\end{aligned}$$

类似地, 由 (3.10) 可得

$$\|\nabla^2u\nabla^2u\|_{L^2(\Omega)}\leqslant C(K)\|\nabla^2u\|^2_{L^4(\Omega)}\leqslant C(K)\sum_{s=0}^{3}E_s^{1/2}.$$

对于 $r=4$, $\nabla^3u\nabla^2u$、$\nabla^3u\nabla^2\mathbb{F}$ 和 $\nabla^2u\nabla^3\mathbb{F}$ 的 $L^2(\Omega)$ 估计同样可以使用 Hölder 不等式和 (3.10) 得到. 因此, 对于 $s\in\{1,2,3\}$, 可得

$$\begin{aligned}\|\nabla^s D_tq\|_{L^2(\partial\Omega)} &\leqslant C(K,\mathrm{Vol}(\Omega))(\|\nabla q\|_{L^\infty(\partial\Omega)}^{1/2}+\|\nabla u\|_{L^\infty(\Omega)}+\|\nabla\mathbb{F}\|_{L^\infty(\Omega)})\\&\quad\times(1+\|\nabla q\|_{L^\infty(\partial\Omega)}^{1/2}+\mathcal{A})\sum_{k=0}^{s+1}E_k^{1/2}.\end{aligned}$$

从而由命题 3.1 可得

$$\begin{aligned}\|\Pi\nabla^3D_tq\|_{L^2(\partial\Omega)} \leqslant C(K,\varepsilon^{-1})\Bigg(&(\|\nabla q\|_{L^\infty(\partial\Omega)}^{1/2}+\|\nabla u\|_{L^\infty(\partial\Omega)}+\|\nabla\mathbb{F}\|_{L^\infty(\partial\Omega)})\|\nabla_ND_tq\|_{L^\infty(\partial\Omega)}\sum_{s=0}^{3}E_s^{1/2}\\&+(\|\nabla p\|_{L^\infty(\partial\Omega)}^{1/2}+\|\nabla u\|_{L^\infty(\Omega)}+\|\nabla\mathbb{F}\|_{L^\infty(\Omega)})\\&\times(1+\|\nabla q\|_{L^\infty(\partial\Omega)}^{1/2}+\mathcal{A}+\|\nabla_ND_tq\|_{L^\infty(\partial\Omega)})\sum_{s=0}^{3}E_k^{1/2}\Bigg).\end{aligned}$$

对于 $r=4$, 由引理 2.8、2.9 和命题 3.1, 类似地可以得到

$$\begin{aligned}\|\Pi\nabla^4D_tq\|_{L^2(\partial\Omega)} &\leqslant C(K)\left(\|\bar{\nabla}^2\theta\|_{L^2(\partial\Omega)}\|\nabla_ND_tq\|_{L^\infty(\partial\Omega)}+\sum_{s=1}^{3}\|\nabla^sD_tq\|_{L^2(\partial\Omega)}\right)\\&\leqslant C(K,\varepsilon^{-1})(\|\nabla q\|_{L^\infty(\partial\Omega)}^{1/2}+\|\nabla u\|_{L^\infty(\partial\Omega)}+\|\nabla\mathbb{F}\|_{L^\infty(\partial\Omega)})\|\nabla_ND_tq\|_{L^\infty(\partial\Omega)}\sum_{s=0}^{4}E_s^{1/2}\\&\quad+C(K,\varepsilon^{-1})(\|\nabla q\|_{L^\infty(\partial\Omega)}^{1/2}\|\nabla u\|_{L^\infty(\Omega)}+\|\nabla\mathbb{F}\|_{L^\infty(\Omega)})\\&\quad\times(1+\|\nabla q\|_{L^\infty(\partial\Omega)}^{1/2}+\mathcal{A}+\|\nabla_ND_tq\|_{L^\infty(\partial\Omega)})(E_4^{1/2}+1)\left(1+\sum_{s=0}^{3}E_s^{1/2}\right)\\&\leqslant C(K,\varepsilon^{-1})(\|\nabla q\|_{L^\infty(\partial\Omega)}^{1/2}+\|\nabla u\|_{L^\infty(\Omega)}+\|\nabla\mathbb{F}\|_{L^\infty(\Omega)})\\&\quad\times(1+\|\nabla q\|_{L^\infty(\partial\Omega)}^{1/2}+\mathcal{A}+\|\nabla_ND_tq\|_{L^\infty(\partial\Omega)})(E_4^{1/2}+1)\left(1+\sum_{s=0}^{3}E_s^{1/2}\right).\end{aligned}$$

为了估计 (3.7), 只需再估计

$$\|\Pi(\nabla^{1+s}u)\cdot(\nabla^{r-s}q)\|_{L^2(\partial\Omega)},\quad 对\ 1\leqslant s\leqslant r-2.$$

当 $r=3$ 时, 由引理 2.1 和 (3.1), 可得

$$\|\nabla^2q\|_{L^\infty(\partial\Omega)}\leqslant C(\|\nabla u\|_{L^\infty(\partial\Omega)}^2+\|\nabla\mathbb{F}\|_{L^\infty(\partial\Omega)}^2+\|\theta\|_{L^\infty(\partial\Omega)}\|\nabla_Nq\|_{L^\infty(\partial\Omega)}).\tag{3.11}$$

因此, 由引理 2.7 和 (3.11), 有

$$\begin{aligned}\|\Pi((\nabla^2u)\cdot\nabla^2q)\|_{L^2(\partial\Omega)} &\leqslant \|\nabla^2u\|_{L^2(\partial\Omega)}\|\nabla^2q\|_{L^\infty(\partial\Omega)}\\&\leqslant C(K,\mathrm{Vol}\,\Omega)(\|\nabla^3u\|_{L^2(\Omega)}+\|\nabla^2u\|_{L^2(\Omega)})\\&\quad\times(\|\nabla u\|_{L^\infty(\partial\Omega)}^2+\|\nabla\mathbb{F}\|_{L^\infty(\partial\Omega)}^2+\|\theta\|_{L^\infty(\partial\Omega)}\|\nabla_Nq\|_{L^\infty(\partial\Omega)})\\&\leqslant C(K,\varepsilon^{-1})(\mathcal{A}^2+\|\nabla q\|_{L^\infty(\partial\Omega)})(E_3^{1/2}(t)+E_2^{1/2}(t)).\end{aligned}$$

当 $r=4$ 时, 由 (2.1)、引理 2.7 和 (3.2b), 可得下式成立:

$$\begin{aligned}\|\Pi((\nabla^2 u)\cdot\nabla^3 q)\|_{L^2(\partial\Omega)} &= \|\Pi\nabla^2 u\cdot\Pi\nabla^3 q+\Pi(\nabla^2 u\cdot N)\tilde{\otimes}\Pi(N\cdot\nabla^3 q)\|_{L^2(\partial\Omega)}\\ &\leqslant C\|\Pi\nabla^2 u\|_{L^4(\partial\Omega)}\|\Pi\nabla^3 q\|_{L^4(\partial\Omega)}+C\|\Pi(N^a\nabla^2 u_a)\|_{L^4(\partial\Omega)}\|\Pi(\nabla_N\nabla^2 q)\|_{L^4(\partial\Omega)}\\ &\leqslant C\|\nabla^2 u\|_{L^4(\partial\Omega)}\|\nabla^3 q\|_{L^4(\partial\Omega)}\\ &\leqslant C(K,\operatorname{Vol}\Omega)(\|\nabla^3 u\|_{L^2(\Omega)}+\|\nabla^2 u\|_{L^2(\Omega)})(\|\nabla^4 q\|_{L^2(\Omega)}+\|\nabla^3 q\|_{L^2(\Omega)})\\ &\leqslant C(K,\varepsilon^{-1})(E_3^{1/2}(t)+E_2^{1/2}(t))(\|\nabla q\|_{L^\infty(\partial\Omega)}^{1/2}\|\nabla u\|_{L^\infty(\Omega)}+\|\nabla\mathbb{F}\|_{L^\infty(\Omega)})\sum_{s=0}^{4}E_s^{1/2}.\end{aligned}$$

类似地有

$$\begin{aligned}\|\Pi((\nabla^3 u)\cdot\nabla^2 q)\|_{L^2(\partial\Omega)} &\leqslant \|\nabla^3 u\|_{L^2(\partial\Omega)}\|\nabla^2 q\|_{L^\infty(\partial\Omega)}\\ &\leqslant C(K,\operatorname{Vol}\Omega)(\|\nabla^4 u\|_{L^2(\Omega)}+\|\nabla^3 u\|_{L^2(\Omega)})\\ &\quad\times(\|\nabla u\|_{L^\infty(\partial\Omega)}^2+\|\nabla\mathbb{F}\|_{L^\infty(\partial\Omega)}^2+\|\theta\|_{L^\infty(\partial\Omega)}\|\nabla_N q\|_{L^\infty(\partial\Omega)})\\ &\leqslant C(K,\varepsilon^{-1},\operatorname{Vol}\Omega)(\mathcal{A}^2+\|\nabla q\|_{L^\infty(\partial\Omega)})(E_4^{1/2}(t)+E_3^{1/2}(t)).\end{aligned}$$

因此, 对于 $r=2,3$, 有

$$(3.7)\ \text{的左边}\leqslant C(K,\varepsilon^{-1})I_1\left(\sum_{s=0}^{r}E_s(t)\right);$$

对于 $r=4$, 有

$$(3.7)\ \text{的左边}\leqslant C(K,\varepsilon^{-1})I_1\left(1+\sum_{s=0}^{r-1}E_s(t)\right)(1+E_r(t)).$$

接下来估计 (3.4) 中剩下的最后一项. 由引理 2.2 和 2.3 可得

$$\frac{\vartheta_t}{\vartheta}-h_{NN}=-\frac{2h_d^aN^d\nabla_a q}{\nabla_N q}+\frac{\nabla_N D_t q}{\nabla_N q}=(2h_d^aN^d\nabla_a q-\nabla_N D_t q)\vartheta.$$

而 $\|\nabla q\|_{L^\infty(\partial\Omega)}$ 和 $\|\nabla_N D_t q\|_{L^\infty(\partial\Omega)}$ 已经包含在 I_1 中, 因此对于 $r=1,2,3$, 有

$$\frac{d}{dt}\mathcal{E}_r(t)\leqslant C(K,\varepsilon^{-1})I_1\left(\sum_{s=0}^{r}E_s(t)\right);$$

对于 $r=4$, 有

$$\frac{d}{dt}\mathcal{E}_r(t)\leqslant C(K,\varepsilon^{-1})I_1\left(1+\sum_{s=0}^{r-1}E_s(t)\right)(1+E_r(t)).$$

对于 $\mathcal{K}_r(t)$ 的物质导数, 类似前面的处理, 由 Hölder 不等式和 Gauss 公式, 对于 $r\leqslant 4$, 可以得到所期望的估计.

综合以上估计, 至此证明了命题 3.2. □

由命题 3.2 可以得到以下推论. 记

$$I_2:=1+\mathcal{A}+\|\nabla_N D_t q\|_{L^\infty(\partial\Omega)}+\|\nabla q\|_{L^\infty(\partial\Omega)}+\|\nabla_N D_t q\|_{L^\infty(\partial\Omega)}^2+\mathcal{A}^2.$$

推论 3.1 假设在 $\partial\Omega$ 上有 $|\theta|+\frac{1}{\iota_0}\leqslant K$ 和 $|\nabla q|\geqslant\varepsilon>0$, 则有

$$\frac{d}{dt}E_4\leqslant C(K,\varepsilon^{-1})I_2(1+\log^+E_4)(1+E_4)\left(1+\sum_{s=0}^{3}E_s\right).$$

证明 因为 $u=u_1+u_2$, $u_1|_{\partial\Omega}=0$ 以及 $N\cdot\mathbb{F}^\top|_{\partial\Omega}=0$, 由引理 2.11, 有

$$\|\nabla u_1\|_{L^\infty(\Omega)}+\|\nabla\mathbb{F}\|_{L^\infty(\Omega)}\leqslant C((1+\log^+E_4)\mathcal{A}+1).$$

又因为 u_2 是调和的, 所以由极大值原理可得 $\|\nabla u_2\|_{L^\infty(\Omega)}\leqslant\mathcal{A}(t)$. 因此由命题 3.2 和 Hölder 不等式可知, $E_4(t)$ 满足

$$\frac{d}{dt}E_4\leqslant C(K,\varepsilon^{-1})I_2(1+\log^+E_4)(1+E_4)\left(1+\sum_{s=0}^{3}E_s\right).$$

类似地, 对于 $r=1,2,3$, 有 $\frac{d}{dt}E_r\leqslant C(K,\delta^{-1})I_2(1+\log^+E_3)\sum_{s=0}^{r}E_s$. □

4 主要结果的证明

定理 1.1 的证明 由推论 3.1, 有

$$\frac{d}{dt}E_4\leqslant C(K,\varepsilon^{-1})I_2(1+\log^+E_4)(1+E_4)\left(1+\sum_{s=0}^{3}E_s\right).$$

注意到 $\frac{d}{dt}(1+E_4)=\frac{d}{dt}E_4$, 对于 $s=0,\dots,4$, 令 $X_s=E_s+1$, 则有

$$\frac{d}{dt}X_4\leqslant C(K,\varepsilon^{-1})I_2(1+\log^+X_4)X_4\left(1+\sum_{s=0}^{3}X_s\right).$$

又由推论 3.1 得

$$\frac{d}{dt}\sum_{s=0}^{3}X_s\leqslant C(K,\varepsilon^{-1})I_2\left(1+\log^+\sum_{s=0}^{3}X_s\right)\sum_{s=0}^{3}X_s.$$

另外, 因为 T^* 是方程 (1.4) 在满足 (1.3) 条件下的解, 且是属于 $H^4(\Omega)$ 的最大时间, 故由命题 3.1, 有

$$\limsup_{t\nearrow T^*}X_4(t)=\infty,$$

从而由 Grönwall 不等式及归纳可以得到最终结论. □

致谢 感谢审稿人提出的宝贵修改意见.

参考文献

1 Beale J T, Kato T, Majda A. Remarks on the breakdown of smooth solutions for the 3-D Euler equations. Comm Math Phys, 1984, 94: 61–66

2 Caflisch R E, Klapper I, Steele G. Remarks on singularities, dimension and energy dissipation for ideal hydrodynamics and MHD. Comm Math Phys, 1997, 184: 443–455

3 Christodoulou D, Lindblad H. On the motion of the free surface of a liquid. Comm Pure Appl Math, 2000, 53: 1536–1602
4 Di Iorio E, Marcati P, Spirito S. Splash singularity for a free-boundary incompressible viscoelastic fluid model. Adv Math, 2020, 368: 107124
5 Ebin D G. Global solutions of the equations of elastodynamics for incompressible materials. Electron Res Announc Amer Math Soc, 1996, 2: 50–60
6 Ferrari A B. On the blow-up of solutions of the 3-D Euler equations in a bounded domain. Comm Math Phys, 1993, 155: 277–294
7 Fu J, Hao C C, Yang S Q, et al. A Beale-Kato-Majda criterion for free boundary incompressible ideal magnetohydrodynamics. J Math Phys, 2023, 64: 091505
8 Ginsberg D. On the breakdown of solutions to the incompressible Euler equations with free surface boundary. SIAM J Math Anal, 2021, 53: 3366–3384
9 Gu X, Lei Z. Local well-posedness of free-boundary incompressible elastodynamics with surface tension via vanishing viscosity limit. Arch Ration Mech Anal, 2022, 245: 1285–1338
10 Gu X, Wang F. Well-posedness of the free boundary problem in incompressible elastodynamics under the mixed type stability condition. J Math Anal Appl, 2020, 482: 123529
11 Hao C C, Luo T. *A priori* estimates for free boundary problem of incompressible inviscid magnetohydrodynamic flows. Arch Ration Mech Anal, 2014, 212: 805–847
12 Hao C C, Wang D H. *A priori* estimates for the free boundary problem of incompressible neo-Hookean elastodynamics. J Differential Equations, 2016, 261: 712–737
13 Hu X, Huang Y. Well-posedness of the free boundary problem for incompressible elastodynamics. J Differential Equations, 2019, 266: 7844–7889
14 Li H, Wang W, Zhang Z. Well-posedness of the free boundary problem in incompressible elastodynamics. J Differential Equations, 2019, 267: 6604–6643
15 Li H, Wang W, Zhang Z. Well-posedness of the free boundary problem in elastodynamics with mixed stability condition. SIAM J Math Anal, 2021, 53: 5405–5435
16 Xu L, Zhang P, Zhang Z. Global solvability of a free boundary three-dimensional incompressible viscoelastic fluid system with surface tension. Arch Ration Mech Anal, 2013, 208: 753–803
17 Zhang Y. Local well-posedness of the free-surface incompressible elastodynamics. J Differential Equations, 2020, 268: 6971–7011

A blow-up criterion for the free boundary problem of incompressible neo-Hookean elastodynamics

Jie Fu, Chengchun Hao, Siqi Yang & Wei Zhang

Abstract We prove a Beale-Kato-Majda type blow-up criterion for the solution to the free boundary problem of the three-dimensional incompressible neo-Hookean elastodynamics model. The result indicates that, under the Taylor-type sign condition, as long as some norms of the curl of the deformation tensor and the velocity field, the second fundamental form of the free boundary, the injective radius of the normal exponential map, and pressure remain bounded, and the gradients of the deformation tensor and the velocity field, together with the material derivatives of the gradient of pressure remain bounded on the free boundary, the solution can be continuously extended.

Keywords **free boundary problem, incompressible neo-Hookean elastodynamics model, Beale-Kato-Majda type blow-up criterion**

MSC(2020) **35B44, 35R35**

doi: 10.1360/SSM-2023-0320