实分析 (2023-2024 春季学期)

作业 1

习题 1.1. 设 A_n 是如下一列点集:

$$A_{2m+1} = \left[0, 2 - \frac{1}{2m+1}\right], \qquad m \in \mathbb{N},$$
$$A_{2m} = \left[0, 1 + \frac{1}{2m}\right], \qquad m \in \mathbb{N}.$$

求 $\limsup A_n$ 和 $\liminf A_n$.

习题 1.2. 设 $\{A_n\}$ 是一列集合, 作 $B_1 = A_1$, $B_n = A_n \setminus (\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i)$, $n = 2, 3, \cdots$, 证明 $\{B_n\}$ 是一列互不相交的集合, 而且 $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \bigcup_{i=1}^{n} B_i$, $n \in \mathbb{N}$.

习题 1.3. 给定一个集簇 $F_1, \cdots, F_n$, 构造另一个集簇 $F_1^*, \cdots, F_N^*$, 其中 $N = 2^n - 1$, 使得 $\bigcup_{k=1}^{n} F_k = \bigcup_{j=1}^{N} F_j^*$, 且 $\{F_j^*\}$ 互不相交, 且对每个 k, $F_k = \bigcup_{F_j^* \subset F_k} F_j^*$.

提示 考察 2^n 个集合 $F_1' \cap F_2' \cap \cdots \cap F_n'$, 其中每个 F_k' 为 F_k 或 F_k^c.

习题 1.4. 证明:

(i) $E \triangle \varnothing = E$, $E \triangle E = \varnothing$, $E \triangle E^c = X$, $E \triangle X = E^c$, 其中 X 为全集.

(ii) 交换律: $E \triangle F = F \triangle E$.

(iii) 结合律: $(E \triangle F) \triangle G = E \triangle (F \triangle G)$.

(iv) 交与对称差满足分配律: $E \cap (F \triangle G) = (E \cap F) \triangle (E \cap G)$.

(v) $E^c \triangle F^c = E \triangle F$; $E = E \triangle F$ 当且仅当 $F = \varnothing$.

(vi) 对任意的集合 E 与 F, 存在唯一的集合 G, 使得 $E \triangle G = F$(实际上 $G = E \triangle F$).

习题 1.5. 设有集合列 $\{A_n\}$, $\{B_n\}$, 试证明

(i) $\limsup\limits_{n\to\infty}(A_n \cup B_n) = \left(\limsup\limits_{n\to\infty} A_n\right) \bigcup \left(\limsup\limits_{n\to\infty} B_n\right)$;

(ii) $\liminf\limits_{n\to\infty}(A_n \cap B_n) = \left(\liminf\limits_{n\to\infty} A_n\right) \bigcap \left(\liminf\limits_{n\to\infty} B_n\right)$.

习题 1.6. 证明 $[a, b]$ 上的全体连续函数组成的集合 $C([a, b])$ 的势为 $\aleph$.

习题 1.7. 从良序原理证明 Zorn 引理.

- 按时交作业, 不接受迟交的作业，雷同的作业均按零分计。
- 作业写清准确题号，不必抄写题目内容。
- 请用中文书写作业, 用数学语言书写证明, 尽量简洁而清晰。