实分析 (2023-2024 春季学期)

作业 10

习题 10.1. 设 F_n 为 Cantor-Lebesgue 函数定义中的函数列, 证明: $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛, 且极限函数 $F(x)=\lim\limits_{n\to\infty}F_n(x)\in\mathcal{C}([0,1])$.

习题 10.2. 设 F 为 Cantor-Lebesgue 函数. 考察由 $x(t)=t$ 和 $y(t)=F(t), 0\leqslant t\leqslant 1$, 参数化的曲线. 证明: 对应 $0\leqslant t\leqslant\bar{x}$ 的曲线段的长度 $L(\bar{x})=\bar{x}+F(\bar{x})$, 曲线的全长为 2.

习题 10.3. 直接用定义证明 Cantor-Lebesgue 函数不是绝对连续的.

习题 10.4. 设 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. 若对任意的有限区间 $[a,b]$ 总有 $f\chi[a,b]$ 绝对连续, 则称 f 绝对连续. 证明:

(i) f 映零测集到零测集.

(ii) f 映可测集到可测集.

习题 10.5. 设 $F\in\mathcal{C}([a,b])$, 对每个 $x\in(a,b)$, $F'(x)$ 存在且 $|F'(x)|\leqslant M$. 证明: $|F(x)-F(y)|\leqslant M|x-y|$ 且 $F\in\mathrm{AC}([a,b])$.