实分析 (2023-2024 春季学期)

作业 11

习题 11.1. 设 $F \in \mathrm{BV}([a,b])$, 证明:

(i) $\int_a^b |F'(x)|dx \leqslant T_F(a,b)$.

(ii) $\int_a^b |F'(x)|dx = T_F(a,b)$ 当且仅当 $F \in \mathrm{AC}([a,b])$.

习题 11.2. 设 F 是 $[a,b]$ 上的单调连续函数. 证明: $F \in \mathrm{AC}([a,b])$ 当且仅当 $\int_a^b F'(x)dx = F(b) - F(a)$.

习题 11.3. 设 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. 证明: f 对某个 M 及所有 $x, y \in \mathbb{R}$ 满足 Lipschitz 条件

$$|f(x) - f(y)| \leqslant M|x - y|$$

当且仅当 f 绝对连续且 $|f'(x)| \leqslant M$ a.e.

习题 11.4. 设 $F \in \mathrm{AC}([a,b])$ 递增. 令 $A = F(a)$ 和 $B = F(b)$. 证明:

(i) 存在这样的函数 F 且是严格递增的, 但在一个正测度集上 $F'(x) = 0$.

(ii) 能够选取到 (i) 中的 F 使得: 存在零测集 $E \subset [A,B]$ 使 $F^{-1}(E)$ 不可测.

(iii) 对任意递增绝对连续函数 F 和可测子集 $E \subset [A,B]$, $F^{-1}(E) \cap \{F'(x) > 0\}$ 可测.

提示 (i) 令 $F(x) = \int_a^x \chi_K(t)dt$, 其中 K 为正测度类 Cantor 集 C (cf. 习题 4.8) 的补集. (ii) $F(C)$ 是零测集. (iii) 先证对任意开集 $\mathcal{O}$ 有 $m(\mathcal{O}) = \int_{F^{-1}(\mathcal{O})} f'(x)dx$.

习题 11.5 (换元公式). 设 $F \in \mathrm{AC}([a,b])$ 递增, $A = F(a)$ 和 $B = F(b)$. 设 f 是 $[A,B]$ 上的任意可测函数.

(i) 证明 $f(F(x))F'(x)$ 在 $[a,b]$ 上可测. (注意: 由习题 11.4(ii) 知 $f(F(x))$ 不一定可测.)

(ii) 证明换元公式: 若 $f \in L^1([A,B])$, 则 $f(F(x))F'(x) \in L^1([a,b])$, 且

$$\int_A^B f(y)dy = \int_a^b f(F(x))F'(x)dx.$$

习题 11.6 (分部积分公式). 设 $F, G \in \mathrm{AC}([a,b])$. 证明 $FG \in \mathrm{AC}([a,b])$, 且

$$\int_a^b F'(x)G(x)dx = [F(x)G(x)]_a^b - \int_a^b F(x)G'(x)dx.$$

- 按时交作业, 不接受迟交的作业，雷同的作业均按零分计。
- 作业写清准确题号，不必抄写题目内容。
- 请用中文书写作业, 用数学语言书写证明, 尽量简洁而清晰。

习题 11.7. 设 F 为 $[a,b]$ 上的有界递增函数, $J(x)$ 为 F 的跳跃函数. 证明: $\limsup\limits_{h\to 0}\frac{J(x+h)-J(x)}{h}$ 可测.

提示 $\forall k > m$, 令 $F_{k,m}^N = \sup\limits_{1/k\leqslant |h|\leqslant 1/m}\left|\frac{J_N(x+h)-J_N(x)}{h}\right|$, 其中 $J_N(x) = \sum\limits_{n=1}^{N}\alpha_n j_n(x)$. 注意每个 $F_{k,m}^N$ 是可测的, 然后令 $N\to\infty$, $k\to\infty$, 最后取 $m\to\infty$.

习题 11.8 (Lebesgue 分解). 设 F 为 $[a,b]$ 上的递增函数. 证明:

(i) 存在分解

$$F = F_A + F_C + F_J,$$

其中 F_A, F_C 和 F_J 均递增且

(a) $F_A \in \mathrm{AC}([a,b])$.

(b) $F_C \in \mathcal{C}([a,b])$, 但 $F_C'(x) = 0$ a.e.

(c) F_J 是跳跃函数.

(ii) 在相差一个常数的意义下, 上述分解是唯一的.