实分析 (2023-2024 春季学期)

作业 2

习题 2.1. 设 $E \subset \mathbb{R}^n, \delta > 0$, 证明集合 $\mathcal{O} = \{x : d(x,E) > \delta\}$ 是开集.

习题 2.2. 设 $E \subset \mathbb{R}^n$, 证明 $f(x) := d(x,E)$ 在 $\mathbb{R}^n$ 上一致连续.

习题 2.3. 设函数 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. 证明 $f(x)$ 连续当且仅当对 $\mathbb{R}$ 中任意开集 $\mathcal{O}$, $f^{-1}(\mathcal{O})$ 为 $\mathbb{R}^n$ 中开集. 若定义域 $\mathbb{R}^n$ 改为开区间, 结论是否正确? 若定义域改为闭区间又如何?

习题 2.4. 设 F_1, F_2 是 $\mathbb{R}$ 中两个互不相交的闭集. 证明: 存在两个互不相交的开集 $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2$, 使得 $\mathcal{O}_1 \supset F_1, \mathcal{O}_2 \supset F_2$.

习题 2.5. 设 $\{F_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中一族有界闭集. 若对任意有限多个 F_{λ_i}, $i = 1, 2, \cdots, N$, $\bigcap\limits_{i=1}^{N} F_{\lambda_i} \neq \varnothing$, 则 $\bigcap\limits_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda \neq \varnothing$.

习题 2.6. 证明: 代数 $\mathscr{A}$ 是 σ-代数当且仅当 $\mathscr{A}$ 关于可列递增并运算封闭 (即, 若 $\{E_j\}_1^\infty \subset \mathscr{A}$ 且 $E_1 \subset E_2 \subset \cdots$, 则 $\bigcup\limits_1^\infty E_j \in \mathscr{A}$).

习题 2.7. 设 $\mathscr{E} \subset \mathcal{P}(X)$. 若 $\mathscr{M} = \sigma(\mathscr{E})$, 证明:

$$\mathscr{M} = \cup\{\sigma(\mathscr{F}) : \mathscr{F}\text{为}\mathscr{E}\text{中可列子集}\}.$$

习题 2.8. 证明: $\mathbb{R}^n$ 中每个闭集可表为可列个开集的交.

习题 2.9. 证明:

(i) $\mathcal{C}$ 是非空有界闭集.
(ii) $\mathcal{C}$ 是完全不连通的.
(iii) $\mathcal{C}$ 是完全集, 即没有孤立点.
(iv) $\mathcal{C}$ 无内点.
(v) $\mathcal{C}$ 的势是 $\aleph$.
(vi) $\mathcal{C}$ 的总长度为 0.

习题 2.10. 在 Cantor 集 $\mathcal{C}$ 上定义Cantor-Lebesgue 函数$F(x)$. 对 $x = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{3^i} \in \mathcal{C}$, 其中 $a_i \in \{0, 2\}$, 令

$$F(x) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{2^i}.$$

- 按时交作业, 不接受迟交的作业，雷同的作业均按零分计。
- 作业写清准确题号，不必抄写题目内容。
- 请用中文书写作业, 用数学语言书写证明, 尽量简洁而清晰。

(i) 证明: $\mathcal{C}$ 上的 Cantor-Lebesgue 函数 F 在 $\mathcal{C}$ 上连续, 且 $F(0)=0, F(1)=1$.

(ii) 若 a, b 是 $\mathcal{C}$ 的构造中所去掉的任一开区间的端点, 证明: $F(a)=F(b)$.

若 $x \in [0,1] \setminus \mathcal{C}$, 则 x 一定属于 $\mathcal{C}$ 的构造中所去掉的某个开区间 (a, b). 由 (ii) 知 $F(a)=F(b)$, 对所有 $x \in (a, b)$, 定义 $F(x)=F(a)$.

(iii) 证明: F 在 $[0,1]$ 上单调且连续.

(iv) 证明: F 满足 $F(x)=2F(x/3), \forall x \in [0,1]$.

(v) 求使 F 不可微的点.