实分析 (2023-2024 春季学期)

作业 3

习题 3.1. $\mathbb{R}$ 中子集 E 的Jordan 外容度$J_*(E)$ 定义为

$$J_*(E) = \inf \sum_{j=1}^{N} |I_j|,$$

其中 inf 对所有由区间 I_j 构成的有限覆盖 $\bigcup\limits_{j=1}^{N} I_j \supset E$ 取值.

(i) 证明对每个集合 E 有 $J_*(E) = J_*(\overline{E})$ (其中 $\overline{E}$ 表示 E 的闭包).

(ii) 试给出一个可列子集 $E \subset [0,1]$ 使得 $J_*(E) = 1$ 但 $m_*(E) = 0$.

(iii) (单调性) 若 $E \subset F$, 则 $J_*(E) \leqslant J_*(F)$.

(iv) (非可列次可加性) 举例说明: 若 $E = \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} E_j$, 则一般而言有 $J_*(E) \nleqslant \sum\limits_{j=1}^{\infty} J_*(E_j)$.

(v) (开集逼近) 若 $E \subset \mathbb{R}$, 则 $J_*(E) = \inf J_*(\mathcal{O})$, 其中下确界关于所有包含 E 的开集 $\mathcal{O}$ 取.

(vi) (分离集的可加性) 若 $E = E_1 \cup E_2$ 且 $d(E_1, E_2) > 0$, 则 $J_*(E) = J_*(E_1) + J_*(E_2)$.

提示 对于举例而言, 可考虑 $E = \mathbb{Q} \cap [0,1]$ 并利用 $\mathbb{Q}$ 在 $[0,1]$ 中的稠密性.

习题 3.2. 令 $E \subset \mathbb{R}$ 且 $m_*(E) > 0$. 证明: 对每个 $\alpha \in (0,1)$, 存在开区间 I 使得

$$m_*(E \cap I) \geqslant \alpha m_*(I).$$

粗略地说, 这个估计说明 E 几乎包含整个区间.

提示 选一个开集 $\mathcal{O} \supset E$ 且满足 $m_*(E) \geqslant \alpha m_*(\mathcal{O})$. 将 $\mathcal{O}$ 表示为互不相交开区间的可列并, 并说明这些区间之一一定满足想要的性质.

习题 3.3 (Borel-Cantelli 引理). 设 $\{E_k\}_{k=1}^{\infty}$ 是由 $\mathbb{R}^n$ 的可测子集组成的可列族且

$$\sum_{k=1}^{\infty} m(E_k) < \infty.$$

令

$$E = \{x \in \mathbb{R}^n : 对无穷多个k,\ x \in E_k\} = \limsup_{k \to \infty} E_k.$$

(i) 证明 E 可测.

(ii) 证明 $m(E)=0$.

提示 利用表达式 $E=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\bigcup\limits_{k\geqslant n}E_k$.

习题 3.4. 设 $A\subset E\subset B$, 其中 A 和 B 为有限可测集. 证明: 若 $m(A)=m(B)$, 则 E 可测.

习题 3.5. 设 $\{E_n\}$ 为 $[0,1]$ 中的可测集列, 且满足 $\limsup m(E_n)=1$. 证明对于任意 $\alpha\in(0,1)$, 存在子列 $\{E_{n_k}\}$, 使得 $m\left(\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}E_{n_k}\right)>\alpha$.

习题 3.6. 设 $E\subset\mathbb{R}$ 可测且 $m(E)>0$. 证明如下定义的 E 的差集

$$\{z\in\mathbb{R}: \text{对某个} x,y\in E,\ z=x-y\},$$

包含一个中心在原点的开区间.