实分析 (2023-2024 春季学期)

作业 4

习题 4.1. 在 $\mathbb{R}^n$ 中构造一个 Lebesgue 不可测集.

习题 4.2. 假设 A 是可测集, B 是不可测集, 证明 $A \triangle B$ 是不可测集.

习题 4.3. 令 $\mathcal{N}$ 表示课堂中构造的 $I = [0,1]$ 中的不可测集.

(i) 证明: 若 E 是 $\mathcal{N}$ 的可测子集, 则 $m(E) = 0$.

(ii) 证明: 集合 $\mathcal{N}^c = I - \mathcal{N}$ 满足 $m_*(\mathcal{N}^c) = 1$, 且若取 $E_1 = \mathcal{N}$ 和 $E_2 = \mathcal{N}^c$, 虽然 $E_1 \cap E_2 = \varnothing$, 但是仍有

$$m_*(E_1) + m(E_2) \neq m_*(E_1 \cup E_2).$$

(iii) 证明: 若 $G \subset \mathbb{R}$ 且 $m_*(G) > 0$, 则 G 包含一个不可测子集.

提示 (i) 可用 E 的有理数平移. (ii) 为证明 $m_*(\mathcal{N}^c) = 1$, 可用反证法, 选取一个可测集 U 使得 $U \subset I, \mathcal{N}^c \subset U$ 且 $m_*(U) < 1 - \varepsilon$.

习题 4.4. 令 $\{f_n\}$ 为 $[0,1]$ 上的可测函数列且 $|f_n(x)| < \infty$, a.e. x. 证明存在正实数列 $\{c_n\}$ 使得

$$\frac{f_n(x)}{c_n} \to 0 \quad \text{a.e. } x.$$

提示 取 c_n 使得 $m(\{x : |f_n(x)/c_n| > 1/n\}) < 2^{-n}$, 运用 Borel-Cantelli 引理.

习题 4.5. 设 $f(x,y)$ 在 $\mathbb{R}^2$ 上分别连续, 即固定一个变量, f 关于另一个变量连续. 证明 f 在 $\mathbb{R}^2$ 上可测.

提示 关于变量 x, 用分段线性函数 f_n 逼近 f, 使得 $f_n \to f$ 逐点成立.

习题 4.6. 设 Γ 是 $\mathbb{R}^2$ 中的曲线 $y = f(x)$, 其中 f 连续. 证明: $m(\Gamma) = 0$.

习题 4.7. 设 $f(x), g(x)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的实值可测函数, 且 $f(x) > 0$, 证明 $f(x)^{g(x)}$ 是可测函数.

习题 4.8. 类 Cantor 集. 在 $[0,1]$ 上构造一个闭集 $\hat{\mathcal{C}}$, 在构造的第 k 阶段删除 2^{k-1} 个位于中心位置的长度为 ℓ_k 的开区间, 其中

$$\sum_{j=1}^{k} 2^{j-1}\ell_j < 1.$$

- 按时交作业, 不接受迟交的作业，雷同的作业均按零分计。
- 作业写清准确题号，不必抄写题目内容。
- 请用中文书写作业, 用数学语言书写证明, 尽量简洁而清晰。

(i) 若取 ℓ_j 足够小, 则 $\sum\limits_{j=1}^{\infty} 2^{j-1}\ell_j < 1$. 在此情况下, 证明 $\hat{\mathcal{C}}$ 的总长度 $|\hat{\mathcal{C}}| = 1 - \sum\limits_{j=1}^{\infty} 2^{j-1}\ell_j$.

(ii) 证明: 若 $x \in \hat{\mathcal{C}}$, 则存在一点列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 使得 $x_n \notin \hat{\mathcal{C}}$, 但 $x_n \to x$ 且 $x_n \in I_n$, 其中 I_n 是 $[0,1] \setminus \hat{\mathcal{C}}$ 的子区间且 $|I_n| \to 0$.

(iii) 证明 $\hat{\mathcal{C}}$ 是完全集且不包含任何开区间.

(iv) 证明 $\hat{\mathcal{C}}$ 是不可列的.

(v) 利用类 Cantor 集构造一个可测集 E, 使得对 $[0,1]$ 的任何非空开子区间 I 成立 $m(E \cap I) > 0$ 和 $m(E^c \cap I) > 0$.

(vi) 证明 $f = \chi_E$ 具有性质: 若 $g = f$ a.e., 则 g 在 $[0,1]$ 的每个点处必不连续.