实分析 (2023-2024 春季学期)

作业 5

习题 5.1 (依测度收敛的保不等式性). 设 $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}, f, g$ 在可测集 E 上可测. 证明: 若 $f_k \xrightarrow{m} f$, 且 $f_k(x) \leqslant g(x)$, a.e., 则 $f(x) \leqslant g(x)$, a.e.

习题 5.2. 设 $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}, f$ 在可测集 E 上可测. 证明: 若 $f_k \xrightarrow{m} f$, 且 $\forall k \in \mathbb{N}$, $f_k(x) \leqslant f_{k+1}(x)$, 则 $f_k \xrightarrow{\text{a.e.}} f$.

习题 5.3. 设 $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}, f$ 在有限可测集 E 上可测. 证明: $f_k \xrightarrow{m} f$ 当且仅当对 $\{f_k\}$ 的任意子列, 存在该子列的子列 a.e. 收敛于 f.

习题 5.4. 设在有限可测集 E 上 $f_k \xrightarrow{m} f$, $g_k \xrightarrow{m} g$, 证明: $f_k \cdot g_k \xrightarrow{m} f \cdot g$.

习题 5.5 (Fréchet 定理). 设 f 是可测集 E 上 a.e. 有限的函数, 证明 f 在 E 上可测当且仅当存在 E 上的连续函数列在 E 上 a.e. 收敛于 f.

习题 5.6. 设 $\chi_{[0,1]}$ 为 $[0,1]$ 的特征函数, 证明: 不存在 $\mathbb{R}$ 上的处处连续函数 f, 使得

$$f(x) = \chi_{[0,1]}(x), \text{ a.e.}$$

习题 5.7. 设 f 是零测集 E 上的有界函数, 证明: f 可测且 $\int_E f = 0$.

习题 5.8. 设 f 是有限可测集 E 上的有界可测函数, g 有界且在 E 上 $f = g$ a.e. 证明: $\int_E f = \int_E g$.

习题 5.9. 设 $m(E) < \infty$, 若去掉有界收敛定理中 "$|f_k|$ 在 E 上一致有界" 的假设, 结论是否成立?