实分析 (2023-2024 春季学期)

作业 6

习题 6.1 (依测度收敛的 Fatou 引理). 设 $\{f_n\}$ 为 $\mathbb{R}$ 上的非负可测函数列, 且 f_n 依测度收敛于 f, 证明

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)dx \leqslant \liminf_{n} \int_{\mathbb{R}} f_n(x)dx.$$

习题 6.2. (i) 证明: 存在 $\mathbb{R}$ 上的正连续函数 f, 使得 f 在 $\mathbb{R}$ 上可积, 但 $\limsup_{x\to\infty} f(x) = \infty$.

(ii) 证明: 若假设 f 在 $\mathbb{R}$ 上一致连续且可积, 则 $\lim_{|x|\to\infty} f(x) = 0$.

提示 对于 (i), 构造一个连续函数使其在 $[n, n+1/n^3)$ 上等于 n, $n \in \mathbb{N}$.

习题 6.3. 考虑定义在 $\mathbb{R}$ 上的函数

$$f(x) = \begin{cases} x^{-1/2}, & 若 0 < x < 1, \\ 0, & 其他. \end{cases}$$

对有理数集 $\mathbb{Q}$ 的一个固定枚举 $\{r_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, 令

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} f(x - r_n).$$

证明 F 可积, 从而定义 F 的级数在 $\mathbb{R}$ 上 a.e. 收敛. 然而, 试观察该级数在每个区间上是无界的, 事实上, 任何与 F a.e. 相等的函数 $\tilde{F}$ 在任何区间内均无界.

- 按时交作业, 不接受迟交的作业，雷同的作业均按零分计。
- 作业写清准确题号，不必抄写题目内容。
- 请用中文书写作业, 用数学语言书写证明, 尽量简洁而清晰。