实分析 (2023-2024 春季学期)

作业 7

习题 7.1 (依测度收敛型控制收敛定理). 设 $\{f_k\}$ 为 $\mathbb{R}^n$ 上的可测函数列, 且 $f_k \xrightarrow{m} f$. 若存在可积函数 $g(x)$, 使得

$$|f_k(x)| \leqslant g(x), \quad \forall k \in \mathbb{N}, \text{ a.e. } x \in \mathbb{R}^n,$$

则 f 在 $\mathbb{R}^n$ 上可积, 且有

$$\int |f_k - f| \to 0, \quad k \to \infty.$$

因此,

$$\int f_k \to \int f, \quad k \to \infty.$$

习题 7.2. 设 $\{f_k\}, \{g_k\}$ 为 $E \subset \mathbb{R}^n$ 上的两个实值可测函数列, 对任意 $x \in E$, 任意 $k \in \mathbb{N}$, 有 $|f_k(x)| \leqslant g_k(x)$, $\lim\limits_{k\to\infty} f_k(x) = f(x)$, $\lim\limits_{k\to\infty} g_k(x) = g(x)$ 且

$$\lim_{k\to\infty} \int_E g_k(x)dx = \int_E g(x)dx < \infty,$$

证明: $\lim\limits_{k\to\infty} \int_E f_k(x)dx = \int_E f(x)dx.$

习题 7.3. 设 f 是 $\mathbb{R}^n$ 上的实值可积函数, 且对任何可测集 $E \subset \mathbb{R}^n$, $\int_E f(x)dx \geqslant 0$, 证明: $f(x) \geqslant 0$, a.e. $x \in \mathbb{R}^n$. 此外, 若对任何可测集 $E \subset \mathbb{R}^n$, $\int_E f(x)dx = 0$, 证明: $f(x) = 0$, a.e. $x \in \mathbb{R}^n$.

习题 7.4. 证明: 若可积函数族 $\{f_k\}$ 在 L^1 范数下收敛 f, 则 $\{f_k\}$ 依测度收敛于 f.

习题 7.5. 证明: 存在 $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ 和可积函数列 $\{f_k\}$ 使得 $\lim\limits_{k\to\infty} \|f_k - f\|_{L^1} = 0$, 但不存在 x 使得 $\lim\limits_{k\to\infty} f_n(x) = f(x)$.

提示 在 $\mathbb{R}$ 中, 令 $f_k = \chi_{I_k}$, 其中 $\{I_k\}$ 是一适当选取的区间列且 $m(I_k) \to 0$.

习题 7.6. 设 $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. 若 $\delta = (\delta_1, \cdots, \delta_n)$ 是 n-元非零实数组, 且

$$f^\delta(x) = f(\delta x) = f(\delta_1 x_1, \cdots, \delta_n x_n),$$

- 按时交作业, 不接受迟交的作业，雷同的作业均按零分计。
- 作业写清准确题号，不必抄写题目内容。
- 请用中文书写作业, 用数学语言书写证明, 尽量简洁而清晰。

证明: $f^\delta \in L^1(\mathbb{R}^n)$ 且

$$\int_{\mathbb{R}^n} f^\delta(x)dx = |\delta_1|^{-1}\cdots|\delta_n|^{-1}\int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx.$$

习题 7.7. 设 $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $\delta > 0$. 证明: $\lim_{\delta\to 1}\|f(\delta x) - f(x)\|_{L^1} = 0$.

习题 7.8 (Riemann-Lebesgue **引理**)**.** 设 $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, 其Fourier 变换定义为

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{-2\pi i x\xi}dx,$$

证明 $\lim_{|\xi|\to\infty} \hat{f}(\xi) = 0$.

提示 写为 $\hat{f}(\xi) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n}[f(x) - f(x-\xi')]e^{-2\pi i x\xi}dx$, 其中 $\xi' = \frac{1}{2}\frac{\xi}{|\xi|^2}$, 并应用平均连续性.