作业 8

习题 8.1. 计算 Lebesgue 积分 $I = \int_0^{\infty} \left(\frac{\arctan z}{z} \right)^2 dz$.

习题 8.2. 设 $f \in L^1([0,b])$,

$$g(x) = \int_x^b \frac{f(t)}{t} dt, \quad 0 < x \leqslant b.$$

证明: $g \in L^1([0,b])$ 且

$$\int_0^b g(x)dx = \int_0^b f(t)dt.$$

习题 8.3. 设 F 为 $\mathbb{R}$ 中的一个闭集且 $m(F^c) < \infty$, 令 $\delta(x) = d(x,F) = \inf\{|x-y| : y \in F\}$. 考察

$$I(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\delta(y)}{|x-y|^2} dy.$$

(i) 证明 δ 满足 Lipschitz 条件 $|\delta(x) - \delta(y)| \leqslant |x-y|$.

(ii) 证明 $\forall x \notin F, I(x) = \infty$.

(iii) 证明 $\forall$ a.e. $x \in F, I(x) < \infty$.

习题 8.4. 设 $\Gamma \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, \Gamma = \{(x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : y = f(x)\}$, f 在 $\mathbb{R}^n$ 上可测. 证明 Γ 是 $\mathbb{R}^{n+1}$ 的可测子集且 $m(\Gamma) = 0$.

习题 8.5. 举例说明: 存在两个可测集 A 和 B 使 $A + B$ 不可测.

提示 在 $\mathbb{R}^2$ 中取 $A = \{0\} \times [0,1]$ 和 $B = \mathcal{N} \times \{0\}$.

习题 8.6. 设 f 是 $[0,1]$ 上的有限值可测函数, 且 $|f(x)-f(y)| \in L^1([0,1]\times[0,1])$. 证明: $f \in L^1([0,1])$.

习题 8.7. 设 f 和 g 为 $\mathbb{R}^n$ 上的可测函数.

(i) 证明 $f(x-y)g(y)$ 在 $\mathbb{R}^{2n}$ 上可测.

(ii) 证明: 若 $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, 则 $f(x-y)g(y) \in L^1(\mathbb{R}^{2n})$.

(iii) 证明卷积 $f * g$ 是 a.e. 良定的 (即 $\forall$ a.e. x, $f(x-y)g(y) \in L^1(\mathbb{R}^n)$).

(iv) 设 $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, 证明 $\|f * g\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \leqslant \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \|g\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}$, 且当 $f, g \geqslant 0$ 时等式成立.

- 按时交作业, 不接受迟交的作业，雷同的作业均按零分计。
- 作业写清准确题号，不必抄写题目内容。
- 请用中文书写作业, 用数学语言书写证明, 尽量简洁而清晰。

(v) 证明 Fourier 变换 $\hat{f}$ 有界且连续, 对每个 ξ 有

$$\widehat{f*g}(\xi)=\hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi).$$

习题 **8.8.** 证明: 若 $f\in L^1(\mathbb{R}^n)$ 且 $f\neq 0$, 则对某个 $c>0$ 和所有 $|x|\geqslant 1$, 有

$$f^*(x)\geqslant \frac{c}{|x|^n}.$$

由此得出 $f^*\notin L^1(\mathbb{R}^n)$. 然后, 当 $\int|f|=1$ 时, 证明弱型估计

$$m(\{x:f^*(x)>\alpha\})\leqslant c/\alpha,\quad \forall\alpha>0$$

在以下意义下是最好的: 若 f 支撑在单位球上且 $\int|f|=1$, 则对某个 $c'>0$ 及所有充分小的 $\alpha>0$ 有

$$m(\{x:f^*(x)>\alpha\})\geqslant c'/\alpha.$$

提示 对第一部分, 利用对某个球 B 有 $\int_B|f|>0$ 这一事实.

习题 **8.9.** 考虑定义在 $\mathbb{R}$ 上的函数

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{|x|(\ln 1/|x|)^2}, & \text{当}|x|\leqslant 1/2,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

(i) 证明: $f\in L^1(\mathbb{R})$.

(ii) 建立不等式: 对某个 $c>0$ 和所有 $|x|\leqslant 1/2$,

$$f^*(x)\geqslant\frac{c}{|x|(\ln 1/|x|)},$$

以此证明极大函数 f^* 不是局部可积的.

习题 **8.10.** 圆盘上的Poisson 核

$$\frac{1}{2\pi}P_r(x)=\begin{cases}\frac{1}{2\pi}\frac{1-r^2}{1-2r\cos x+r^2}, & |x|\leqslant\pi,\\ 0, & |x|>\pi,\end{cases}$$

其中 $0<r<1$, 取 $\delta=1-r$, 证明 $\{K_\delta:=\frac{1}{2\pi}P_{1-\delta}\}_{0<\delta<1}$ 是恒同逼近.

习题 **8.11.** $\mathbb{R}$ 上的Fejér 核为

$$\frac{1}{2\pi}F_N(x)=\begin{cases}\frac{1}{2\pi N}\frac{\sin^2(Nx/2)}{\sin^2(x/2)}, & |x|\leqslant\pi,\\ 0, & |x|>\pi,\end{cases}$$

其中 $N\in\mathbb{N}$. 令 $\delta=1/N$, 证明: $\{K_\delta:=\frac{1}{2\pi}F_{1/\delta}\}$ 是恒同逼近.