实分析 (2023-2024 春季学期)

作业 9

习题 9.1. 设 $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $\{K_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ 为恒同逼近, 证明: 存在 $c > 0$, 使得

$$\sup_{\varepsilon>0} |(f * K_\varepsilon)(x)| \leqslant c f^*(x).$$

习题 9.2. 设 $F \subset \mathbb{R}$ 为闭集, $\delta(x) = d(x, F) = \inf\{|x - y| : y \in F\}$. 显然当 $x \in F$ 时有 $\delta(x + y) \leqslant |y|$. 证明更精确的估计:

$$\delta(x + y) = o(|y|), \quad \forall \text{ a.e. } x \in F,$$

即对 a.e. $x \in F$, $\lim\limits_{|y|\to 0} \delta(x + y)/|y| \to 0$.

习题 9.3. 设 $a, b > 0$. 令

$$F(x) = \begin{cases} x^a \sin(x^{-b}), & 0 < x \leqslant 1, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

(i) 证明:

$$F \in \mathrm{BV}([0, 1]) \iff a > b.$$

(ii) 取 $a = b$, 对每个 $\alpha \in (0, 1)$, 构造一个函数 f 满足条件 $|f(x) - f(y)| \leqslant A|x - y|^\alpha$, 但 $f \notin BV([0, 1])$.

提示 对 (ii), 若 $h > 0$, 则 $|f(x + h) - f(x)|$ 被 $C(x + h)^\alpha$ 或者由中值定理被 $C'h/x$ 控制. 然后, 考虑两种情形: $x^{a+1} \geqslant h$ 或 $x^{a+1} < h$, 找出 α 与 a 的联系.

习题 9.4. 考察函数

$$F(x) = \begin{cases} x^2 \sin(x^{-2}), & 0 < |x| \leqslant 1, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

证明: 对每个 $x \in [-1, 1]$, $F'(x)$ 存在, 但 $F' \notin L^1([-1, 1])$.

习题 9.5. 设 F 为 $[a, b]$ 上的实值递增连续函数, 证明函数 $D_-F(x)$ 可测.

习题 9.6. 设 $F \in \mathcal{C}([a, b])$, 对每个 $x \in [a, b]$ 有 $(D^+F)(x) \geqslant 0$. 证明: F 在 $[a, b]$ 上递增.

习题 9.7. 若 F 在 $\mathbb{R}$ 的任何有限子区间 $[a, b]$ 上是有界变差的, 且 $\sup\limits_{a,b} T_F(a, b) < \infty$, 则称 F 在 $\mathbb{R}$ 上是有界变差的. 证明这样的函数具有下列性质:

- 按时交作业, 不接受迟交的作业，雷同的作业均按零分计。
- 作业写清准确题号，不必抄写题目内容。
- 请用中文书写作业, 用数学语言书写证明, 尽量简洁而清晰。

(i) 存在某个常数 $A > 0$, 使得对所有 $h \in \mathbb{R}$ 成立: $\int_{\mathbb{R}} |F(x+h) - F(x)|dx \leqslant A|h|$.

(ii) 对所有 $\varphi \in \mathcal{C}_c^1(\mathbb{R})$ 且 $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |\varphi(x)| \leqslant 1$, 成立: $|\int_{\mathbb{R}} F(x)\varphi'(x)dx| \leqslant A$.

提示 对 (i), $F = F_1 - F_2$, 其中 F_j 单调有界. 对 (ii), 使用 (i).