第零章 预备知识

§ 0.1 集论初步

§ 0.1.1 集及其运算

先引进一些常用数集的记号:

$\mathbb{N}$:=正整数集 $\qquad$ $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$ = 自然数集 (包含 0)

$\mathbb{Z}$:=整数集 $\qquad$ $\mathbb{Q}$:=有理数集

$\mathbb{I}$:=无理数集 $\qquad$ $\mathbb{R} := \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$ = 实数集

$\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ = 扩充实数集 $\qquad$ $\mathbb{C}$:=复数集

$\mathbb{R}$ 上的算术运算可以部分地扩充到 $\overline{\mathbb{R}}$:

$$x \pm \infty = \pm\infty \ (x \in \mathbb{R}), \qquad \infty + \infty = \infty, \quad -\infty - \infty = -\infty,$$
$$x \cdot (\pm\infty) = \pm\infty \ (x > 0) \qquad x \cdot (\pm\infty) = \mp\infty \ (x < 0).$$

我们不试图定义 $\infty - \infty$, 但我们遵守这样的约定 (除非另有说明):

$$0 \cdot (\pm\infty) = 0.$$

我们回顾在中学数学以及数学分析中就已学过的关于集合中的一些常用符号, 基本概念和基本运算.

- $\varnothing =$ 空集.
- 幂集: $\mathcal{P}(X) = 2^X = \{E : E \subset X\} = X$ 的所有子集构成的集簇，其中“包含于”记号 $E \subset X$ 不排除 $E = X$ 的可能性, 不表示“真包含”的意思.
- 若 I 是一个指标集, $\mathcal{E} = \{E_\alpha : \alpha \in I\} = \{E_\alpha\}_{\alpha \in I}$ 是一集簇, 它的元素的并集和交集定义为

  并集: $\bigcup\limits_{\alpha\in I} E_\alpha = \{x : 存在某个\alpha \in I使x \in E_\alpha\}$.

  交集: $\bigcap\limits_{\alpha\in I} E_\alpha = \{x : 对任意\alpha \in I有x \in E_\alpha\}$.

  分配律: $E \cap (\bigcup\limits_{\alpha\in I} E_\alpha) = \bigcup\limits_{\alpha\in I}(E \cap E_\alpha), E \cup (\bigcap\limits_{\alpha\in I} E_\alpha) = \bigcap\limits_{\alpha\in I}(E \cup E_\alpha)$.

  若只要 $\alpha \neq \beta$ 就有 $E_\alpha \cap E_\beta = \varnothing$，则称集簇 $\{E_\alpha\}$ 互不相交.
- 当考虑的指标集为正整数集 $\mathbb{N}$ 时, 集簇也用 $\{E_n\}_{n=1}^\infty$ 或 $\{E_n\}_1^\infty$ 表示, 相应的并集和交集也有类似的表示. 此时, 集列的上限集($\limsup$ 或 $\overline{\lim}$) 和下限集($\liminf$ 或 $\underline{\lim}$) 分别定义为:

$$
\begin{aligned}
\limsup_{n\to\infty} E_n = &\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{n=k}^{\infty} E_n \\
=&\{x : \forall k \in \mathbb{N}, \exists n \geqslant k, s.t.\, x \in E_n\} \\
=&\{x : 存在无穷多个n, 使x \in E_n\}.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\liminf_{n\to\infty} E_n = &\bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcap_{n=k}^{\infty} E_n \\
=&\{x : \exists k \in \mathbb{N}, s.t. \forall n \geqslant k均有x \in E_n\} \\
=&\{x : 当\ n\ 充分大以后均有x \in E_n\}.
\end{aligned}
$$

  显然, $\liminf E_n \subset \limsup E_n$. 若上、下限集相等, 则说 $\{E_n\}$ 的极限集存在并等于上限集或下限集, 记为 $\lim\limits_{n\to\infty} E_n$.
- 单调集列: 设 $\{A_k\}$ 是一集列, 若 $\forall k$, 有 $A_k \supset A_{k+1}$, 则称此集列为递减集列, 此时称其交集 $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} A_k$ 为集列 $\{A_k\}$ 的极限集, 记为 $\lim\limits_{k\to\infty} A_k$; 若 $\forall k$, 有 $A_k \subset A_{k+1}$, 则称此集列为递增集列, 此时称其并集 $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k$ 为集列 $\{A_k\}$ 的极限集, 记为 $\lim\limits_{k\to\infty} A_k$.
- 差集与补集: 设 E, F 为两个集合, E 与 F 的差集记为

$$E \setminus F = \{x \in E : x \notin F\},$$

  读作 E 减 F, 或记为 $E - F$, 它是由在集合 E 中而不在集合 F 中的一切元素构成的集合. 当 F 是 E 的子集时, 称 $E \setminus F$ 为集合 F 相对于 E 的补集或余集. 当 E 为所考虑问题的全集时, $F^c := \{x \in E : x \notin F\}$ 简称为 F 的补集或余集, 即 $F^c = E \setminus F$.

回顾一个重要的法则, 它提供了一种对偶方法, 将已证明的关于集的某种

性质转移到它们的补集上:

命题 0.1 (De Morgan (德摩根) 法则).

$$\left(\bigcup_{\alpha\in I}E_\alpha\right)^c=\bigcap_{\alpha\in I}(E_\alpha)^c,\quad \left(\bigcap_{\alpha\in I}E_\alpha\right)^c=\bigcup_{\alpha\in I}(E_\alpha)^c.$$

- 对称差: 设 E,F 为两个集合, 称集合 $(E\setminus F)\cup(F\setminus E)$ 为E 与 F 的对称差, 记为 $E\triangle F$. 它是由既属于 E,F 之一但又不同时属于两者的所有元素所构成的集合. 由定义立知, $E\cup F=(E\cap F)\cup(E\triangle F)$. 因此, 对称差表示并集中除去公共元素后的部分.
- 集合的直积: 设 X,Y 是两个集合, 所有有序 "元素对" (x,y) (其中 $x\in X$, $y\in Y$) 形成的集合称为 X 与 Y 的Descartes (笛卡尔) 积, 记为 $X\times Y$, 即

$$X\times Y=\{(x,y):x\in X,\ y\in Y\},$$

其中 $(x,y)=(x',y')$ 是指 $x=x'$, $y=y'$. $X\times X$ 也记为 X^2. 例如, $[0,1]^2=[0,1]\times[0,1]$ 为平面上单位闭正方形.
- 映射. 映射$f:X\to Y$ 是从 X 到 Y 的一个对应关系，使得 $\forall x\in X$, $\exists! y\in Y$, s.t. $y=f(x)$. 当 Y 是 $\mathbb{C}$ 或其子集时也称 f 为函数. X 称为 f 的定义域 (domain); Y 称为 f 的陪域 (或到达域 (codomain)); 若 $D\subset X$ 和 $E\subset Y$, 定义 D 关于映射 f 的像为

$$f(D)=\{f(x):x\in D\},$$

$f(X)$ 称为 f 的值域 (range), 定义 E 关于 f 的原像为

$$f^{-1}(E)=\{x:f(x)\in E\}.$$

易验证由此式定义的映射 $f^{-1}:\mathcal{P}(Y)\to\mathcal{P}(X)$ 与并、交和补运算可交换:

$$f^{-1}\left(\bigcup_{\alpha\in I}E_\alpha\right)=\bigcup_{\alpha\in I}f^{-1}(E_\alpha),\quad f^{-1}\left(\bigcap_{\alpha\in I}E_\alpha\right)=\bigcap_{\alpha\in I}f^{-1}(E_\alpha),$$
$$f^{-1}(E^c)=\left(f^{-1}(E)\right)^c.$$

像映射 $f:\mathcal{P}(X)\to\mathcal{P}(Y)$ 与并运算可交换, 但一般与交或补运算不可交换.

若 $f(x_1)=f(x_2)$ 当且仅当 $x_1=x_2$ 时成立, 则称 f 是单射; 若 $f(X)=Y$, 则称为满射; 若既是单射又是满射, 则称为双射 (或一一对应).

若 $f:X\to Y$ 和 $g:Y\to Z$ 为映射, 记 $g\circ f$ 为它们的复合:

$$g\circ f:X\to Z,\quad g\circ f(x)=g(f(x)).$$

若 f 为双射, 则存在逆映射 $f^{-1}:Y\to X$ 使得 $f^{-1}\circ f$ 和 $f\circ f^{-1}$ 分别是

X 和 Y 上的恒同映射. 若 $A \subset X$, 记 $f|_A$ 为 f 在 A 上的限制:

$$(f|_A): A \to Y; \quad (f|_A)(x) = f(x), x \in A.$$

§ 0.1.2 集的势

一个集合 A 中所包含的元素的个数称为 A 的势 (cardinality) 或基数, 记为 $\mathrm{card}(A)$.

设 A, B 是两个集合, 若存在一个从 A 到 B 上的一一对应, 则称集合 A 与 B 对等, 记为 $A \sim B$, 它们具有相同的势 $\mathrm{card}(A) = \mathrm{card}(B)$. 对等是一种等价关系, 它对于无限集的研究非常重要. 易验证对等具有下列性质:

(i) (自反性) $A \sim A$;

(ii) (对称性) 若 $A \sim B$, 则 $B \sim A$;

(iii) (传递性) 若 $A \sim B, B \sim C$, 则 $A \sim C$.

若 $A \sim C \subset B$, 则称 $\mathrm{card}(A) \leqslant \mathrm{card}(B)$; 若 $A \sim C \subset B$ 但 A 不与 B 对等, 则称 $\mathrm{card}(A) < \mathrm{card}(B)$.

定理 0.2 (Schröder-Bernstein (施罗德-伯恩斯坦) 定理)**.** 设 A, B 是两个非空集合. 若 $\mathrm{card}(A) \leqslant \mathrm{card}(B)$, $\mathrm{card}(B) \leqslant \mathrm{card}(A)$, 则 $\mathrm{card}(A) = \mathrm{card}(B)$.

由该定理可知, 对任何两个势 α 和 β, 三个关系

$$\alpha < \beta, \ \alpha = \beta, \ \alpha > \beta$$

中不可能有两者同时成立 (这里未断言必有一个成立). 事实上, 若 $\alpha = \beta$, 则其余两式已不可能成立; 若 $\alpha < \beta$ 与 $\alpha > \beta$ 同时成立, 则由 Schröder-Bernstein 定理的证明知 $\alpha = \beta$, 矛盾. 实际上, 上述关系有且仅有一个成立 (cf. [Fol13, 命题 0.7])

定理 0.3 (无最大势定理)**.** 对任意 (非空) 集合 A, $\mathrm{card}(A) < \mathrm{card}(\mathcal{P}(A))$.

该定理表明, 不存在具有最大势的集.

记正整数集的势 $\mathrm{card}(\mathbb{N}) = \aleph_0$. 若 $\mathrm{card}(A) = \aleph_0$, 则称 A 是可列集 (或可数集).[1] 把不是可列的无限集称为不可列集. 有限集和可列集可统称为至多可列集.

定理 0.4. 任意无限集必包含一个可列子集.

[1] 需注意, 不同的书对可数和可列的定义并不相同.

由该定理可得: 凡无限集必与它的一个真子集对等. 事实上, 设 A 为给定的无限集, 由定理 0.4存在可列子集 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. 令 $B=A\setminus\{a_1\}$, 则 B 是 A 的真子集. 作如下对应:

$$\begin{aligned} &a\leftrightarrow a, && \text{对}a\in A\setminus\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}},\\ &a_k\leftrightarrow a_{k+1}, && \text{对}k\in\mathbb{N}. \end{aligned}$$

易见此为 A 与 B 之间的一一对应, 因此 A 与它的一个真子集 B 对等.

定理 0.5. 可列个可列集的并集仍是可列集.

由上述定理的证明亦可得: 若 A_k $(k=1,\cdots,n)$ 是可列集, 则 $A_1\times\cdots\times A_n$ 是可列集.

区间 $[0,1]$ 不是可列集: 记 $\mathrm{card}([0,1])=\aleph$, 有 $\aleph>\aleph_0$. 若 $A\sim[0,1]$, 则称 A 具有连续统的势.[2]

§ 0.1.3 有序集

本节我们讨论与有序集概念相关联的一系列概念.

定义 0.6. 对于给定的非空集 X, 若在它的元之间能引进关系 "$\leqslant$"(这里作为序的记号, 可读为 "小于或等于"), 满足序公理:

(i) 自反性: $a\leqslant a$;

(ii) 传递性: 若 $a\leqslant b$, $b\leqslant c$, 则 $a\leqslant c$;

(iii) 反对称性: 若 $a\leqslant b$, $b\leqslant a$, 则 $a=b$,

其中 $a,b,c\in X$, 则称 X 为赋予半序 "$\leqslant$" 的半序集(或偏序集, partially ordered set, 有时也称为 poset), 记作 $(X,\leqslant)$. 若对半序集 X 的任意两个元 a,b, 还满足条件:

(iv) 关系式 $a\leqslant b$ 与 $b\leqslant a$ 二者必居其一,

则称 X 为带有序 "$\leqslant$" 的全序集 (或线性序集). 半序集中的链 (chain)是指全序子集, 即链的任何两个元素均满足 (iv).

"$a\leqslant b$" 也可写成 "$b\geqslant a$", 用记号 "$a<b$" 表示 "$a\leqslant b$ 但 $a\neq b$".

定义 0.7. 设 $(X,\leqslant)$ 为半序集, 若 $x\in X$ 是满足 $x\leqslant y$ (resp. $x\geqslant y$) 的唯一 $y\in X$ 是 x 自身, 则称 x 是 X 的一个极大 (resp. 极小) 元. 极大和极小元不一定存在, 也不一定唯一 (除非是全序的情形).

[2] 1874 年 Cantor 猜测在可列集势和实数势之间没有别的势 (即 $\aleph_0$ 与 $\aleph$ 之间没有其它势), 这就是著名的连续统假设. 记 $2^{\aleph_0}$ 为可列集的所有子集所构成的集合的势, 则有 $\aleph=2^{\aleph_0}$, 是下一个势. 它又被称为 Hilbert 第一问题, 在 1900 年第二届国际数学家大会上, Hilbert 把 Cantor 的连续统假设列入 20 世纪有待解决的 23 个重要数学问题之首 (尚未得到完全解决).

设 $E \subset X$. 若 $b \in X$ 满足: 对所有 $x \in E$ 均有 $x \leqslant b$, 则称 b 为 E 的一个上界. 若 b 为 E 的一个上界, 且对 E 的任一上界 b', 均有 $b \leqslant b'$, 则称 b 为 E 的上确界. 可类似定义 E 的下界和下确界. E 的上、下确界分别记为 $\sup E$ 和 $\inf E$. E 的上界不一定属于 E, E 的极大元不一定是 E 的一个上界 (除非 E 是全序集).

定义 0.8. 若 X 是带有序 "$\leqslant$" 的全序集, X 的每个非空子集含有一个极小元, 则称 X 关于序 "$\leqslant$" 是良序的, "$\leqslant$" 称为 X 上的一个良序.

接下来, 引入集论中的一个基本原理并推导一些结论.

定理 0.9 (Hausdorff (豪斯多夫) 极大原理, 1914). 每个半序集都含有极大全序子集.

此原理的另一版本如下:

引理 0.10 (Zorn (佐恩) 引理, 1935). 设 $(X, \leqslant)$ 为非空半序集, 若 X 的每个非空全序子集均有上界, 则 X 有极大元.

定理 0.11 (良序原理). 任何非空集 X 都能被良序化.

定理 0.12 (Zermelo (策梅洛) 选择公理). 若 $\{X_\alpha\}_{\alpha \in A}$ 是一族互不相交的非空集, 则存在一个集 $E \subset \bigcup\limits_{\alpha \in A} X_\alpha$, 使得对每个 $\alpha \in A$, $E \cap X_\alpha$ 是单点集. 换言之, 存在一个集 E, 使得 E 是由每个 X_α 中选取一个元构成的.

实际上, 上述四个结论是等价的, 请自行证明或查阅相关书籍.

§ 0.2 度量空间

下面, 我们回顾关于度量 (或距离) 的概念(cf. [Zor16, 第 9-10 章]). 度量是 "距离" 这个概念的抽象化, 最早由法国数学家 Fréchet 引入.

定义 0.13. 设 X 为一非空集合, 若函数 $\rho : X \times X \to [0, \infty)$ 满足

(i) 非退化性: $\rho(x, y) = 0 \iff x = y$;

(ii) 对称性: $\rho(x, y) = \rho(y, x)$;

(iii) 三角不等式: $\rho(x, y) \leqslant \rho(x, z) + \rho(z, y)$, $\forall z \in X$,

则称 ρ 是 X 上的一个度量(或距离),[a] 而称 X 是以 ρ 为度量的度量空间, 记为 (X, ρ). 在不引起混淆的情况下, 将 (X, ρ) 简记为 X.

若 (X, ρ) 是度量空间, Y 是 X 的一个非空子集, 则 (Y, ρ) 也是一个度量

空间, 称为 (X,ρ) 的子空间.

[a]不难发现, $\rho(x,y)\geqslant 0$ 是其他几条公理的直接推论, 故亦可去掉, i.e., $0=\rho(x,x)\leqslant \rho(x,z)+\rho(z,x)=2\rho(x,z), \forall z\in X$. 有时, 也可将 (ii)-(iii) 改成一个条件: $\rho(x,y)\leqslant \rho(x,z)+\rho(y,z), \forall z\in X$.

例 0.14. i) Euclid 距离

$$\rho(x,y)=|x-y|:=\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2\right)^{1/2}$$

是 $\mathbb{R}^n$ 上的一个度量. 此外, 在 $\mathbb{R}^n$ 中还可以用下面方法定义其他的度量:

$$\rho_\infty(x,y)=\max_i|x_i-y_i|,\quad \rho_1(x,y)=\sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|.$$

由此可知, 在一个集合中引入度量的方法不限于一种.

ii) 在 $[0,1]$ 上的连续函数所构成的空间 $\mathcal{C}([0,1])$ 上,

$$\rho_1(f,g)=\int_0^1|f(x)-g(x)|dx\quad \text{和 } \rho_\infty(f,g)=\sup_{0\leqslant x\leqslant 1}|f(x)-g(x)|$$

均为度量.

iii) 若 ρ 是 X 上的度量, $A\subset X$, 则 $\rho|_{A\times A}$ 是 A 上的一个度量.

iv) 若 (X_1,ρ_1) 和 (X_2,ρ_2) 是度量空间, $X_1\times X_2$ 上的乘积度量 ρ 为

$$\rho((x_1,x_2),(y_1,y_2))=\max(\rho_1(x_1,y_1),\rho_2(x_2,y_2)).$$

$X_1\times X_2$ 上其他度量有, 如

$$\rho_1(x_1,y_1)+\rho_2(x_2,y_2),\quad [\rho_1(x_1,y_1)^2+\rho_2(x_2,y_2)^2]^{1/2}.$$

设 (X,ρ) 为度量空间. 若 $x\in X, r>0$, 以 x 为中心 r 为半径的(开) 球为

$$B(r,x)=\{y\in X:\rho(x,y)<r\}.$$

设 $E\subset X$, 若对任意的 $x\in E$, 存在 $r>0$ 使得 $B(r,x)\subset E$, 则称 E 为开集, 若 E^c 为开集, 则称 E 为闭集. 例如, 每个球 $B(r,x)$ 为开集, 因为若 $y\in B(r,x)$ 且 $\rho(x,y)=s$, 则 $B(r-s,y)\subset B(r,x)$.

- X 和 $\varnothing$ 既是开集也是闭集.
- 任意开集族的并为开集, 从而任意闭集族的交为闭集.
- 任意有限个开 (闭) 集的交 (并) 是开 (闭) 集. (事实上, 若 $U_1,\cdots,U_n$ 是开集, 对 $x\in\bigcap_1^n U_j$, 对每个 j 存在 $r_j>0$ 使得 $B(r_j,x)\subset U_j$, 那么 $B(r,x)\subset\bigcap_1^n U_j$, 其中 $r=\min(r_1,\cdots,r_n)$, 因此 $\bigcap_1^n U_j$ 是开集.)

注记 0.15. 后两条性质可以通过 De Morgan 法则 (i.e., 定理0.1) 推导. 需要指出的是, 无限多个开集的交未必是开集, 例如 $I_n = \left(-\frac{1}{n}, 1+\frac{1}{n}\right)$ 是开集, 但 $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} I_n = [0,1]$ 是闭集. 另外, 任意多个闭集的并不一定是闭集, 例如, $F_n = \left[\frac{1}{n}, 1-\frac{1}{n}\right], n = 3, 4, \cdots$, 则 F_n 是闭集, 而 $\bigcup\limits_{n=3}^{\infty} F_n = (0,1)$ 不是闭集.

设 $E \subset X$, 所有开集 $U \subset E$ 的并是包含在 E 内的最大开集, 称为 E 的内部, 记为 $\mathring{E}$.

设 $x \in X$, 若存在 E 中的互异点列 $\{x_k\}$, 使得

$$\lim_{k\to\infty} \rho(x_k, x) = 0,$$

则称 x 为 E 的聚点 (或极限点), E 的聚点全体记为 E', 称为 E 的导集. 注意, E 的聚点不一定属于 E. 称 $E \setminus E'$ 中的点为 E 的孤立点. E 的闭包是指集 $E \cup E'$, 记为 $\overline{E}$. E 的闭包一定是闭集. 若 $E' = E$, 则称 E 为完全集. 若 $E \subset E'$, 则称 E 是自密集, 换句话说, 当集合中的点均是该集的聚点时, 这个集即为自密集; 或者说没有孤立点的集就是自密集. 显然, 完全集是自密闭集.

若 $\overline{E} = F$, 则称 E 在 F 中稠密, 若 $\mathring{\overline{E}} = \varnothing$, 则称 E 是稀疏集 (或无处稠密集). (应当注意, 在稠密性的定义中, 并不要求 $E \subset F$, E 与 F 甚至可以没有公共点. 比如, 有理数集在无理数集中稠密.) 若 X 有可数稠密子集, 则称 X 是可分的. 例如, $\mathbb{Q}^n$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的可数稠密子集. 对 X 中序列 $\{x_n\}$ 及 $x \in X$, 若 $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(x_n, x) = 0$, 则称 x_n收敛到 x, 记为 $x_n \to x$ 或 $\lim x_n = x$.

命题 0.16. 设 X 是度量空间, $E \subset X$, $x \in X$, 下列叙述是等价的:

(i) $x \in \overline{E}$.

(ii) 对所有 $r > 0$, $B(r, x) \cap E \neq \varnothing$.

(iii) 存在序列 $\{x_n\} \subset E$ 收敛到 x.

若 (X_1, ρ_1) 和 (X_2, ρ_2) 为度量空间, 称映射 $f : X_1 \to X_2$ 在 $x \in X_1$ 处连续, 若对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得当 $\rho_1(x, y) < \delta$ 时 $\rho_2(f(x), f(y)) < \varepsilon$, 换句话说, 使得 $f^{-1}(B(\varepsilon, f(x))) \supset B(\delta, x)$. 若 f 在每个点 $x \in X_1$ 处连续, 则称 f 连续, 除此之外, 若连续性定义中的 δ 能被选取得不依赖于 x, 则称 f一致连续.

命题 0.17. $f : X_1 \to X_2$ 连续当且仅当对任意开集 $U \subset X_2$ 有 $f^{-1}(U)$ 是 X_1 中的开集.

度量空间 (X, ρ) 中序列 $\{x_n\}$ 称为Cauchy 列, 若当 $n, m \to \infty$ 时 $\rho(x_n, x_m) \to 0$. X 的子集 E 称为完备的, 若 E 中的每个 Cauchy 列收敛且其极限属于 E. 例如, $(\mathbb{R}^n, |\cdot|)$ 是完备的, 而 $(\mathbb{Q}^n, |\cdot|)$ 不是.

命题 0.18. 完备度量空间的闭子空间是完备的, 任意度量空间的完备子集是闭的.

在度量空间 (X,ρ) 中能够定义点到集合的距离和两个集合间的距离. 即, 若 $x\in X, E, F\subset X$,

$$d(x,E)=\inf\{\rho(x,y): y\in E\},$$
$$d(E,F)=\inf\{\rho(x,y): x\in E, y\in F\}=\inf\{\rho(x,F): x\in E\}.$$

由命题 0.16, 观察到 $\rho(x,E)=0$ 当且仅当 $x\in\overline{E}$. 定义 $E\subset X$ 的直径为

$$\operatorname{diam} E=\sup\{\rho(x,y): x,y\in E\}.$$

若 $\operatorname{diam} E<\infty$, 则称 E 是有界的.

若 $E\subset X$ 和集簇 $\{V_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 满足 $E\subset\bigcup\limits_{\alpha\in A}V_\alpha$, 称 $\{V_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 为 E 的覆盖, 称 E 被 V_α 等覆盖. 若对每个 $\varepsilon>0$, E 能被有限多个半径为 ε 的球覆盖, 则称 E 是全有界的. 每个全有界集是有界的, 因为若 $x,y\in\bigcup\limits_1^n B(\varepsilon,z_j)$, 比如 $x\in B(\varepsilon,z_1)$ 和 $y\in B(\varepsilon,z_2)$, 则

$$\rho(x,y)\leqslant\rho(x,z_1)+\rho(z_1,z_2)+\rho(z_2,y)\leqslant 2\varepsilon+\max\{\rho(z_j,z_k): 1\leqslant j,k\leqslant n\}.$$

(反过来一般是不对的, 但在 $\mathbb{R}^n$ 中是对的.) 若 E 是全有界的, 则 $\overline{E}$ 也是, 因为若 $E\subset\bigcup\limits_1^n B(\varepsilon,z_j)$, 则 $\overline{E}\subset\bigcup\limits_1^n B(2\varepsilon,z_j)$.

定理 0.19. 若 E 是度量空间 (X,ρ) 的子集, 下面叙述是等价的:

(i) E 是完备的和全有界的.

(ii) (Bolzano-Weierstrass (波尔查诺-魏尔斯特拉斯) 性质) E 中每个序列存在收敛于 E 中某个点的子列.

(iii) (Heine-Borel (海涅-博雷尔) 性质) 若 $\{V_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 是 E 的开覆盖, 则存在有限集 $F\subset A$ 使得 $\{V_\alpha\}_{\alpha\in F}$ 覆盖 E.

具有定理 0.19的性质 (i)-(iii) 的集合 E 被称为紧集. 根据命题 0.18, 每个紧集都是闭集且有界; 在一般情况下, 反之不成立, 但在 $\mathbb{R}^n$ 中成立.

命题 0.20. $\mathbb{R}^n$ 中每个有界闭集是紧集.

如果在集合 X 上有两个度量 ρ_1 和 ρ_2, 若存在常数 $C, C'>0$, 满足 $C\rho_1<\rho_2<C'\rho_1$, 则称这两个度量等价. 容易验证, 等价的度量定义了相同的开集、闭集和紧集, 相同的收敛序列和 Cauchy 序列, 以及相同的连续和一致连续映射. 因此, 关于度量空间的大多数结果不依赖于选择的具体度量, 而只依赖于其等价类.

§ 0.3 σ-代数

在测度论中经常遇到具有某些运算封闭性的集类, 下面主要介绍代数和 σ-代数两种集类. 以下设 X 是一给定的非空集.

定义 0.21. 设 $\mathscr{A} \subset \mathcal{P}(X)$. 若 $\varnothing \in \mathscr{A}$, 并且 $\mathscr{A}$ 对并运算和补运算封闭, 则称 $\mathscr{A}$ 为代数.

命题 0.22. 设 $\mathscr{A} \subset \mathcal{P}(X)$. 则

(i) 若 $\varnothing \in \mathscr{A}$, 并且 $\mathscr{A}$ 对交运算和补运算封闭, 则 $\mathscr{A}$ 是代数.

(ii) 若 $\mathscr{A}$ 是代数, 则 $\mathscr{A}$ 对交运算和差运算封闭.

结合代数的定义和命题 0.22可知, 若 $\mathscr{A}$ 是代数, 则 $\mathscr{A}$ 对有限并、有限交、差运算和补运算封闭.

定义 0.23. 设 $\mathscr{F} \subset \mathcal{P}(X)$. 若 $\varnothing \in \mathscr{F}$, 并且 $\mathscr{F}$ 对可列并和补运算封闭, 则称 $\mathscr{F}$ 为σ-代数.

例 0.24. X 的幂集 $\mathscr{P}(X)$ 是一个 σ-代数, 这是 X 上最大的 σ-代数. 由 $\varnothing$ 和 X 两个集构成的集类 $\{\varnothing, X\}$ 也是一个 σ-代数. 另一方面, 若 $\mathscr{F}$ 是 X 上的 σ-代数, 则必有 $\{\varnothing, X\} \subset \mathscr{F}$ (这是由于 $\varnothing \in \mathscr{F}$ 并且 $\mathscr{F}$ 对补运算封闭, 故 $X = \varnothing^c \in \mathscr{F}$). 因此, $\{\varnothing, X\}$ 是 X 上的最小的 σ-代数.

命题 0.25. 设 $\mathscr{F}$ 是 σ-代数. 则

(i) $\mathscr{F}$ 是代数.

(ii) $\mathscr{F}$ 对并运算、交运算、差运算和可列交运算封闭.

结合 σ-代数的定义和命题 0.25可知, 若 $\mathscr{F}$ 是一个 σ-代数, 则 $\mathscr{F}$ 对有限并和可列并、有限交和可列交、补运算和差运算都封闭. 因此 σ-代数具有很好的运算封闭性.

设 $\mathscr{C} \subset \mathcal{P}(X)$ 非空, 则 $\mathscr{P}(X)$ 是一个包含 $\mathscr{C}$ 的 σ-代数. 这表明至少存在一个包含 $\mathscr{C}$ 的 σ-代数. 令 $\mathscr{F}$ 是所有包含 $\mathscr{C}$ 的 σ-代数的交. 容易证明 $\mathscr{F}$ 满足以下两条性质:

(i) $\mathscr{F}$ 是包含 $\mathscr{C}$ 的 σ-代数;

(ii) 若 $\mathscr{F}'$ 是一个包含 $\mathscr{C}$ 的 σ-代数, 则 $\mathscr{F} \subset \mathscr{F}'$.

换言之, $\mathscr{F}$ 是包含 $\mathscr{C}$ 的最小 σ-代数, 称为由集类 $\mathscr{C}$生成的 σ-代数, 记为 $\sigma(\mathscr{C})$.

定义 0.26. 由度量空间 X 中开集族生成的 σ-代数称为 X 上的 Borel σ-代数, 记作 $\mathscr{B}_X$. 它的成员被称为 Borel 集.

显然, $\mathscr{B}_X$ 包括开集、闭集、开集的至多可列交、闭集的至多可列并等等.

若记 S 为包含 X 中所有开集的任意 σ-代数, 则 $\mathscr{B}_X \subset S$, 即 $\mathscr{B}_X$ 是 S 中最小的 σ-代数. 因 σ-代数的任意交 (不必可列) 亦为 σ-代数, 故可以定义 $\mathscr{B}_X$ 为包含开集类的所有 σ-代数的交集. 这也说明了 Borel σ-代数的存在性和唯一性.

从开集和闭集这两种最简单的 Borel 集开始, 可以根据复杂性 (递增) 列出所有的 Borel 集. 比如, 接下来即开集的可列交或它们的补集, 即闭集的可列并.

定义 0.27. 可列个开集的交集称为G_δ 集; 可列个闭集的并集称为F_σ 集; 可列个 G_δ 集的并集称为$G_{\delta\sigma}$ 集; 可列个 F_σ 集的交集称为$F_{\sigma\delta}$ 集; 等等. (δ 和 σ 代表德语中的 Durchschnitt 和 Summe, 即交集和并集.)

例如, $\mathbb{R}^n$ 中全体有理点所构成的集合为 F_σ 集. 当然, F_σ 集不一定是闭集, G_δ 集也不一定是开集, 但它们都是 Borel 集.

§ 0.4 $\mathbb{R}^n$ 中开集的构造

$\mathbb{R}^n$ 中的 (闭) 长方体 R 由 n 个 1 维有界闭区间的乘积给出:

$$R = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots [a_n, b_n],$$

其中 $a_j \leqslant b_j$ 为实数, $j = 1, \cdots, n$. 即

$$R = \{(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n : a_j \leqslant x_j \leqslant b_j, \forall j = 1, \cdots, n\}.$$

注意: 在此定义中, 长方体是有界闭集, 且各边平行于坐标轴. 在 $\mathbb{R}$ 中, 长方体就是有界闭区间或点, $\mathbb{R}^2$ 中就是有界长方形, $\mathbb{R}^3$ 中即为有界闭长方体, 当然均包含低维的长方体.

R 的边长为 $b_1 - a_1, \cdots, b_n - a_n$. R 的体积, 记为 $|R|$, 定义为 $|R| = \prod_{i=1}^n (b_i - a_i)$. 当然, $n = 1$ 时即为长度, $n = 2$ 时就是面积.

开长方体是开区间的乘积, 长方体 R 的内部则为

$$(a_1, b_1) \times \cdots (a_n, b_n).$$

方体是边长相等的长方体. 因此, 若 $Q \subset \mathbb{R}^n$ 是边长为 ℓ 的方体, 则其体积 $|Q| = \ell^n$.

长方体的并称为几乎互不相交的当且仅当其内部互不相交.

本章中, 长方体和方体覆盖起着重要的角色, 这里先给出两个重要的引理.

引理 0.28. 若一个长方体是有限多个其它长方体的几乎互不相交并, 即 $R = \bigcup_{k=1}^{N} R_k$, 则

$$|R| = \sum_{k=1}^{N} |R_k|.$$

稍微做一下更改, 则有

引理 0.29. 若 $R, R_1, \cdots, R_N$ 均为长方体, 且 $R \subset \bigcup_{k=1}^{N} R_k$, 则

$$|R| \leqslant \sum_{k=1}^{N} |R_k|.$$

主要想法仍是延长各长方体的边, 但此时相应于 J_k 的集合不一定是互不相交的, 证明从略.

现在, 我们用方体来描述开集的结构, 先从 1 维开始.

定理 0.30 (**$\mathbb{R}$ 中开集构造定理**). $\mathbb{R}$ 中的每个开子集 $\mathcal{O}$ 能被唯一地表示成至多可列个互不相交开区间的并集. (注: 这里的开区间可以是 $(-\infty, a)$, (b, ∞), $(-\infty, \infty)$ 这样的区间.)

自然地, 若 $\mathcal{O}$ 是开集且 $\mathcal{O} = \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j$, 其中 I_j 是互不相交的开区间, 则 $\mathcal{O}$ 的测度应该为 $\sum_{j=1}^{\infty} |I_j|$. 因这种表示是唯一的, 故我们能够将它作为开集测度的定义. 我们将注意到只要 $\mathcal{O}_1$ 和 $\mathcal{O}_2$ 是开集且互不相交, 那么它们的并的测度就是它们的测度之和. 虽然这为开集提供了一个自然的测度概念, 但还不清楚如何推广到 $\mathbb{R}$ 中的其他集合. 类似的方法在高纬情形, 甚至定义开集的测度也遇到了困难, 这是由于类似定理 0.30的结果不成立(cf. [SS05, Ex.1.12]). 然而, 有一个可以替代的结果.

定理 0.31 (**$\mathbb{R}^n$ 中开集构造定理**). 设 $n \geqslant 1$, $\mathbb{R}^n$ 中的每个开子集 $\mathcal{O}$ 可以表示成至多可列个几乎互不相交的闭方体的并集.

若 $\mathcal{O} = \bigcup_{j=1}^{\infty} R_j$, 其中 R_j 为几乎互不相交的长方体, 则规定 $\mathcal{O}$ 的测度为 $\sum_{j=1}^{\infty} |R_j|$ 是合理的. 这也是自然的, 因为每个长方体的边界的体积应为 0, 长方体的重叠部分不影响 $\mathcal{O}$ 的体积. 然而, 上面分成长方体的分解不是唯一的, 并不知道这个和是否依赖于这个分解. 因此, 在 $\mathbb{R}^n$ $(n \geqslant 2)$ 中体积或面积的概念, 即使是对开集而言, 也更加地微妙.

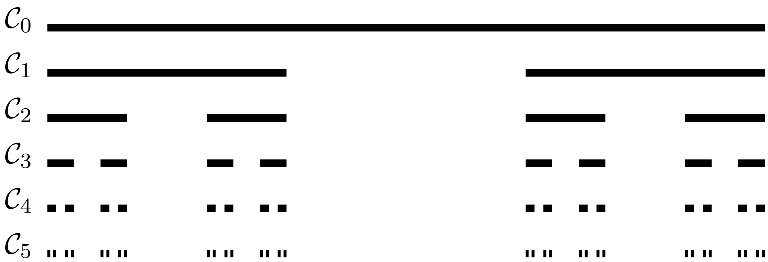
§ 0.5 Cantor (三分) 集

Cantor 集在集合论以及一般的分析学中扮演着重要的角色. 它和它的变体为许多启发性的例子提供了丰富的源泉. 早在 [Zor15, 第 2 章] 就学过, 我们在此再回顾一下.

从单位闭区间 $\mathcal{C}_0 = [0,1]$ 开始, 令 $\mathcal{C}_1$ 为从 $\mathcal{C}_0$ 去掉中间 $\frac{1}{3}$ 的开区间后余下的部分, 即 $\mathcal{C}_1 = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$. 然后对 $\mathcal{C}_1$ 的每个子区间重复这个过程, 得到

$$\mathcal{C}_2 = \left[0, \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9}, 1\right].$$

之后再对 $\mathcal{C}_2, \cdots, \mathcal{C}_k$ 重复以上过程.



这个过程产生了一个单调递减紧集列 $\{\mathcal{C}_k\}_{k=0}^{\infty}$, 其中 $\mathcal{C}_k$ 是 2^k 个长度为 3^{-k} 的闭区间的并. 下限集

$$\mathcal{C} = \bigcap_{k=0}^{\infty} \mathcal{C}_k$$

称为Cantor 集. 尽管 Cantor 集的构造很简单, 但它具有许多拓扑和解析性质, 可以归结为: Cantor 集是一个总长度为零且势为 $\aleph$ 的完全不连通的有界稀疏完全集. 类似地, 如果保证每次移除区间所用的比例都是一样的, 那总能得到移除的区间长度总和为 1(“具恒定分割的 Cantor 集”[SS05, Ex. 1.3(a)]).

Cantor 三分集是由德国数学家 Cantor 于 1883 年构造的, 并没有现实原型, 是理性思维的产物, 很难用传统的几何学术语言进行描述, 它是一个新的几何对象.