第一章
测度论

1.1. 外测度 15
1.1.1. 外测度的定义 15
1.1.2. 外测度的性质 16
1.2. 可测集与 Lebesgue 测度 17
1.2.1. 测度的定义及其性质 17
1.2.2. Lebesgue 测度的不变性质 19
1.2.3. Vitali 不可测集的构造 20
1.3. 可测函数 21
1.3.1. 可测函数的定义和基本性质 21
1.3.2. 用简单函数或阶梯函数逼近 24
1.3.3. Littlewood 三原则 24

本章主要讲 $\mathbb{R}^n$ 中 Lebesgue 测度的构造, 以及相应的可测函数类的研究. 测度论是实分析的基础.

§1.1 外测度

§1.1.1 外测度的定义

我们先从外测度的定义和基本性质讲起. 大致地说, 外测度 m_* 是赋予 $\mathbb{R}^n$ 中任何子集的第一个尺寸概念；很多例子表明这个概念与我们早期的直观想法是一致的. 然而, 我们也将会看到, 外测度缺少一些想要的性质, 比如当取互不相交集的并集时的可加性, 为了改进这个问题, 就需要在下一节中引进可测集的概念.

顾名思义, 外测度就是试图用集合 E 的外部逼近来描述它的体积. 假设 E 被方体覆盖, 若此覆盖越精细、越少的方体重叠, 则 E 的体积就越接近于这些方体的体积之和. 由此直观的描述, 我们可以引进下列定义.

定义 1.1. 设 $E \subset \mathbb{R}^n$, E 的外测度定义为

$$m_*(E) = \inf \sum_{j=1}^{\infty} |Q_j|, \tag{1.1}$$

这里的下确界对所有由闭方体构成的可数覆盖 $\bigcup_{j=1}^{\infty} Q_j \supset E$ 取值. 一般地, $m_* \in [0, \infty]$.

注记 1.2. (i) 若 $m_*(E)$ 中换成有限和, 则是不够的. 若只考虑 E 的有限覆盖, 则得到的量一般比 $m_*(E)$ 大. (1 维的例子(cf. [SS05, Ex.1.14]))

(ii) 若将方体覆盖换成长方体覆盖, 则二者是相同的(cf. [SS05, Ex.1.15]). 若换成球覆盖, 二者的等价性就没那么显然了(cf. [SS05, Ex.3.26]).

下面来看几个例子.

例 1.3. 设 $x_0 \in \mathbb{R}^n$, 则 $m_*(\{x_0\}) = 0$. 这是因为 $\{x_0\} \subset \{x_0\}$. 另外, $m_*(\varnothing) = 0$.

例 1.4. 设 $Q \subset \mathbb{R}^n$ 为闭方体, 则 $m_*(Q) = |Q|$.

例 1.5. 若 Q 为开方体, 则 $m_*(Q) = |Q|$ 仍成立.

例 1.6. 若 R 为长方体, 则 $m_*(R) = |R|$.

例 1.7. $m_*(\mathbb{R}^n) = \infty$.

例 1.8. 设 $\mathcal{C}$ 为 Cantor 集, 则 $m_*(\mathcal{C}) = 0$.

§ 1.1.2 外测度的性质

前面几个例子对外测度的定义提供了一些直观认识. 由 m_* 及下确界的定义即知:

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \text{闭方体覆盖} \bigcup_{j=1}^{\infty} Q_j \supset E,\ \text{s.t.} \sum_{j=1}^{\infty} |Q_j| \leqslant m_*(E) + \varepsilon.$$

下面, 我们证明外测度的 5 个性质, 作为一系列的观察给出.

观察 1.1 (单调性). $E_1 \subset E_2 \implies m_*(E_1) \leqslant m_*(E_2)$.

特别地, 单调性意味着 $\mathbb{R}^n$ 的每个有界子集均有有限外测度.

观察 1.2 (可列次可加性). $E = \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j \implies m_*(E) \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} m_*(E_j)$.

观察 1.3. 若 $E \subset \mathbb{R}^n$, 则 $m_*(E) = \inf_{\text{开}\mathcal{O} \supset E} m_*(\mathcal{O})$, 其中下确界关于所有包含 E 的开集 $\mathcal{O}$ 取值.

观察 1.4. 若 $E = E_1 \cup E_2$, 且 $d(E_1, E_2) > 0$, 则

$$m_*(E) = m_*(E_1) + m_*(E_2).$$

观察 1.5. 若 E 是几乎互不相交方体的可列并, $E = \bigcup_{j=1}^{\infty} Q_j$, 则

$$m_*(E) = \sum_{j=1}^{\infty} |Q_j|.$$

观察 1.5说明, 若一集合能被分成可列个几乎互不相交的方体, 则它的外测度等于方体体积之和. 特别地, 由定理 0.31可得开集的外测度等于其分解中的方体体积之和, 这与最初的猜测一致. 更进一步, 这也证明了这个和不依赖于分解.

从这也可看出, 用基本计算算出的简单集合的体积与它们的外测度是一致的. 一旦我们发展了积分理论所需要的工具, 这个论断就能很容易地证明. 特别地, 我们可以验证开球或闭球的外测度等于它的体积.

尽管从观察 1.4和观察 1.5中还不能得出: 对 $\mathbb{R}^n$ 中互不相交子集的并 $E_1 \cup E_2$ 成立

$$m_*(E_1 \cup E_2) = m_*(E_1) + m_*(E_2). \tag{1.2}$$

但事实上, 当 E_1, E_2 不是高度不规则或病态的集合, 且在下节所给出的意义下可测时, (1.2)是成立的.

§ 1.2 可测集与 Lebesgue 测度

§ 1.2.1 测度的定义及其性质

可测性的概念将 $\mathbb{R}^n$ 中的一些子集分离出来, 它们的外测度满足所有想要的性质, 包括对集合的互不相交并的 (可列) 可加性. 有很多种方式来定义可测性, 但它们都是等价的, 可能最简单及最直观的定义如下:

定义 1.9. 称 $E \subset \mathbb{R}^n$可测, 若 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists$ 开集 $\mathcal{O} \supset E$, s.t.

$$m_*(\mathcal{O} \setminus E) \leqslant \varepsilon.$$

若 E 可测, 则定义 E 的Lebesgue 测度(简称测度) 为

$$m(E) = m_*(E).$$

显然, 测度继承了外测度具有的所有性质：观察 1.1–观察 1.5. 由定义, 可发现如下性质.

性质 1.1. $\mathbb{R}^n$ 中的任意开集是可测的.

现在, 我们汇集可测集的一些更深入的性质. 特别地, 我们将证明可测集关于集合论中的多种运算, 如可列并、可列交、补集等封闭.

性质 1.2. 若 $m_*(E) = 0$, 则 E 可测. 特别地, 零外测度集的任何子集可测.

作为这个性质的推论, 由例 1.8知 Cantor 集 $\mathcal{C}$ 可测.

性质 1.3. 可列个可测集的并集可测.

性质 1.4. 闭集可测.

下面来证明所用到的论断.

引理 1.10. 若闭集 F 和紧集 K 互不相交, 则 $d(F, K) > 0$.

性质 1.5. 可测集的补集可测.

性质 1.6. 可列个可测集的交集可测.

我们发现可测集族在集合论的熟知运算下是封闭的, 不仅关于有限并与交封闭, 而且关于可列并与交运算封闭. 这种由有限运算过渡到无限运算的过程在分析中是至关重要的. 然而, 再强调一下, 在处理可测集时不可数并和交运算是不允许的!

定理 1.11 (可列可加性). 设 $E_1, E_2, \cdots$ 为互不相交的可测集, $E = \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} E_j$, 则

$$m(E) = \sum_{j=1}^{\infty} m(E_j).$$

至此, 可测集的 Lebesgue 测度的可列可加性就建立了. 接下来, 我们来考虑测度的连续性.

推论 1.12 (测度的连续性). 设 $E_1, E_2, \cdots$ 为 $\mathbb{R}^n$ 中的可测子集.

(i) (下连续性) 若 $E_k \nearrow E$, 则 $m(E) = \lim\limits_{N\to\infty} m(E_N)$.

(ii) (上连续性) 若 $E_k \searrow E$ 且对某个 k, $m(E_k) < \infty$, 则 $m(E) = \lim\limits_{N\to\infty} m(E_N)$.

注记 1.13. 若没有对某个 k, $m(E_k)<\infty$ 的假设, (ii) 的结论未必成立. 例如, $\forall n$, 令 $E_n=(n,\infty)\subset\mathbb{R}$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} m(E_n)=\infty$, 但

$$m(\lim_{n\to\infty} E_n)=m(\varnothing)=0.$$

下面的定理说明可测集可以用包含它的开集或它包含的闭集来逼近.

定理 1.14 (可测集逼近定理)**.** 设 $E\subset\mathbb{R}^n$ 可测, 则 $\forall\varepsilon>0$,

(i) $\exists$ 开集 $\mathcal{O}\supset E$, s.t. $m(\mathcal{O}\setminus E)\leqslant\varepsilon$.

(ii) $\exists$ 闭集 $F\subset E$, s.t. $m(E\setminus F)\leqslant\varepsilon$.

(iii) 若 $m(E)<\infty$, 则 $\exists$ 紧集 $K\subset E$, s.t. $m(E\setminus K)\leqslant\varepsilon$.

(iv) 若 $m(E)<\infty$, 则 $\exists$ 有限个闭方体之并 $F=\bigcup\limits_{j=1}^{N} Q_j$, s.t.

$$m(E\Delta F)\leqslant\varepsilon.$$

下面的命题是定理 1.14的一个推论, Lebesgue 可测集用它所包含的紧集逼近的性质, 被称为内正则性.

命题 1.15 (Lebesgue 可测集的内正则性)**.** 设 $E\subset\mathbb{R}^n$ 可测, 则

$$m(E)=\sup\{m(K):\ K\subset E,\ K\text{为紧集}\}.$$

下面的推论说明了可测集可用 G_δ 集或 F_σ 集逼近.

推论 1.16. $E\subset\mathbb{R}^n$ 可测

(i) 当且仅当 $\exists G_\delta$ 集 $\mathcal{O}\supset E$, s.t. $m(\mathcal{O}\setminus E)=0$.

(ii) 当且仅当 $\exists F_\sigma$ 集 $F\subset E$, s.t. $m(E\setminus F)=0$.

由于开集可测, 故 $\mathscr{B}_{\mathbb{R}^n}$ 包含于由可测集形成的 σ-代数. 自然地, 我们会问 "这个包含是不是严格的?", 即是否存在不是 Borel 集的可测集? 答案是 "存在". (cf. [SS05, Ex.1.35])

由推论 1.16得, Lebesgue 可测集可以作为 $\mathscr{B}_{\mathbb{R}^n}$ 的完备化, 即附加上测度为零的 Borel 集的子集.

另外, Lebesgue 测度具有唯一性, 证明留到第4章, 即

命题 1.17 (Lebesgue 测度的唯一性)**.** Lebesgue 测度 m 是在 Borel σ-代数 $\mathscr{B}_{\mathbb{R}^n}$ 上满足 $m(Q)=|Q|$ 的唯一测度, 其中 Q 为 $\mathbb{R}^n$ 中闭方体.

§ 1.2.2 Lebesgue 测度的不变性质

$\mathbb{R}^n$ 中 Lebesgue 测度的一个关键性质是平移不变性.

命题 1.18 (测度的平移不变性)**.** 设 $E \subset \mathbb{R}^n$ 为可测集, 则对任何 $h \in \mathbb{R}^n$, $E_h := E + h = \{x + h : x \in E\}$ 可测, 且 $m(E_h) = m(E)$.

同样可以证明 Lebesgue 测度的伸缩不变性. 设 $\delta > 0$, 记

$$\delta E = \{\delta x : x \in E\},$$

则有

命题 1.19 (测度的伸缩不变性)**.** 设 $E \subset \mathbb{R}^n$ 可测, 则对任何 $\delta > 0$, δE 可测, 且 $m(\delta E) = \delta^n m(E)$.

另外, Lebesgue 测度也是反射不变的, 即若 E 可测, 则 $-E = \{-x : x \in E\}$ 可测且 $m(-E) = m(E)$. 测度的其它不变性质可参见 [SS05, Ex.1.7, 1.8, Chp.2, Pb. 4].

§ 1.2.3 Vitali 不可测集的构造

$\mathbb{R}^n$ 中的子集并非都是可测集, 这一点 Lebesgue 早就预见到了, 只不过第一个不可测集的例子是由意大利数学家 Vitali 于 1905 年做出的, 其中要用到 Zermelo 选择公理与 Lebesgue 测度的平移不变性. 当然, 在一般的数学实践中, 遇到不可测集的机会是极少的, 它通常只是被用来构造各种特例, 以廓清某些课题的适应范围, 而使我们对这种测度理论的认知更加深刻.

本节以 1 维为例, 构造不可测集.

例 1.20 (不可测集的例). 设 $x, y \in [0, 1]$. 若 $x - y$ 是有理数, 则称 x 与 y 等价, 记为 $x \sim y$. 对任意 $x \in [0, 1]$, 令

$$E_x = \{y \in [0, 1] : y \sim x\}.$$

E_x 是 $[0, 1]$ 的一个子集, 称之为由 x 确定的等价类. 容易验证:

(i) 若 $x_1 \sim x_2$, 则 $E_{x_1} = E_{x_2}$;

(ii) 若 $x_1 \nsim x_2$, 则 $E_{x_1} \cap E_{x_2} = \varnothing$.

因此区间 $[0, 1]$ 被分割为一些互不相交的等价类. 根据 Zermelo 选择公理, 存在 $[0, 1]$ 的一个子集 $\mathcal{N}$, 使得 $\mathcal{N}$ 是由每个等价类中只选取一个元构成的.

定理 1.21. 集合 $\mathcal{N}$ 是不可测的.

§ 1.3 可测函数

有了可测集之后, 我们来看积分理论的核心, 即可测函数.

首先, 定义集合 $E \subset \mathbb{R}^n$ 上的特征函数:

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1, & x \in E, \\ 0, & x \notin E. \end{cases}$$

接下来, 转到积分理论的基石. Riemann 积分是依托如下的阶梯函数:

$$f = \sum_{k=1}^{N} a_k \chi_{R_k}, \tag{1.3}$$

其中每个 R_k 为长方体, a_k 为常数.

然而, 对 Lebesgue 积分而言, 需要更广泛的函数: 简单函数, 定义为下列有限和

$$f = \sum_{k=1}^{N} a_k \chi_{E_k}, \tag{1.4}$$

其中每个 E_k 为有限可测集, a_k 为常数.

§ 1.3.1 可测函数的定义和基本性质

先只考虑 $\mathbb{R}^n$ 上的实值函数 f, 并且函数值允许取 $\pm\infty$, 也就是说 $f(x) \in \overline{\mathbb{R}} := [-\infty, \infty]$, 此时称为广义实值函数, 以后若无特别声明, "函数" 一词均指广义实值函数. 若对任意 $x \in \mathbb{R}^n$, 都有 $-\infty < f(x) < \infty$, 则称 f 为有限实值函数. 我们会发现, 在以下的理论及许多应用中, 一个函数至多在一个零测集上取无穷值.

定义 1.22. 设 $E \subset \mathbb{R}^n$ 为可测集, f 是定义在 E 上的函数, 若 $\forall a \in \mathbb{R}$, 集合

$$f^{-1}([-\infty, a)) := \{x \in E : f(x) < a\}$$

是可测集, 则称 f 为 E 上的Lebesgue 可测函数, 简称为可测函数, 或称 f 在 E 上可测.[a]

[a] 若 E 是 Borel 集, $\{x \in E : f(x) < a\}$ 也是 Borel 集, 则称 f 是 E 上的 Borel 可测函数, 简称 Borel 函数. 这类函数构成了 Lebesgue 可测函数类的子类, 它包含所有阶梯函数, 连续函数和分段连续函数.

以后在不引起混淆的情况下, 经常把上述集合简记为 $\{f < a\}$. 此外, $\{f \leqslant a\}, \{f = a\}, \{f \geqslant a\}, \{f > a\}$ 等的意义可类似地理解.

注记 1.23. 由定义可得

(i) f 可测 $\Longleftrightarrow \{f \leqslant a\}$ 可测, $\forall a \in \mathbb{R}$.

(ii) f 可测 $\Longleftrightarrow \{f \geqslant a\}$ 可测, $\forall a \in \mathbb{R}$.

(iii) f 可测 $\Longleftrightarrow \{f > a\}$ 可测, $\forall a \in \mathbb{R}$.

(iv) f 可测 $\Longleftrightarrow -f$ 可测.

(v) 若 f 是有限值的, 则 f 可测 $\Longleftrightarrow \{a < f < b\}$ 可测, $\forall a, b \in \mathbb{R}$. (其中的任一 "$<$" 换成 "$\leqslant$" 仍成立.)

进而, 可以得到如下性质.

性质 1.7. 有限实值函数 f 可测

(i) 当且仅当对任意开集 $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}$, $f^{-1}(\mathcal{O})$ 可测;

(ii) 当且仅当对任意闭集 $F \subset \mathbb{R}$, $f^{-1}(F)$ 可测.

这个性质也可以应用到广义实值函数, 只需加上额外的假设: $f^{-1}(-\infty)$ 和 $f^{-1}(+\infty)$ 均为可测集.

性质 1.8. (i) 若 f 在 $\mathbb{R}^n$ 上连续, 则 f 可测.

(ii) 若 f 是 $\mathbb{R}^n$ 上的有限实值可测函数, Φ 是 $\mathbb{R}$ 上的连续函数, 则 $\Phi \circ f$ 可测.

注记 1.24. (i) 由此可知, 连续函数一定可测. 但是, 反过来, 可测函数不一定是连续函数. 例如,

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0,1] \cup [2,4] \cup [6,7], \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$$

易验证 $f(x)$ 是可测函数, 但 $f(x)$ 在上面区间的端点处不连续.

(ii) 在性质 1.8 (ii) 中取特殊的连续函数 Φ, 就可得到包含 f 的表达式的可测性. 例如, $\Phi(t) = t^{-1}$ $(t \neq 0)$ 连续, $f \neq 0$ 可测, 则 $\frac{1}{f}$ 可测.

(iii) 在性质 1.8 (ii) 的条件下, 一般不能得到 $f \circ \Phi$ 的可测性. (cf. [SS05, Ex.1.35])

性质 1.9. 设 $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ 为一可测函数列, 则

$$\sup_n f_n(x), \ \inf_n f_n(x), \ \limsup_n f_n(x), \ \liminf_n f_n(x)$$

均可测. (注: 上述指标集不能改成不可数集.)

若 f_n 的极限 f 存在, 则 $f = \limsup\limits_{n\to\infty} f_n = \liminf\limits_{n\to\infty} f_n$. 由此可得:

性质 1.10. 设 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为一可测函数列, 且

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x),$$

则 f 可测.

性质 1.11. 设 f, g 在 E 上可测, 则

(i) 对任意正整数 k, f^k 可测;

(ii) 若 f, g 均为有限实值函数, 则 $f+g$ 和 fg 可测.

注记 1.25. (i) 性质 1.11 (ii) 中不能取广义值 $\pm\infty$, 因为 $(-\infty)+(+\infty)$, $(+\infty)-(+\infty)$ 等是没有意义的.

(ii) 性质 1.8 – 性质 1.11说明可测函数关于确界运算、极限运算和代数运算封闭.

定义 1.26. 称定义在 E 上的两个函数 f, g几乎处处相等, 是指 $m(\{x \in E : f(x) \neq g(x)\}) = 0$, 记为

$$f(x) = g(x), \quad \text{a.e. } x \in E,$$

或简记为 $f = g$ a.e.

一般地, 称一个性质或论断几乎处处成立是指除去一个零测集外, 它是成立的.

性质 1.12. 设 f 可测, 且 $f = g$ a.e., 则 g 可测.

这也说明, 在零测集上改变函数的取值不影响该函数的可测性.

若 f, g a.e. 定义在 $E \subset \mathbb{R}^n$ 上, 不妨设分别定义在 $E \setminus S_1$ 及 $E \setminus S_2$ 上, 这里 $m(S_1) = m(S_2) = 0$, 则 $f+g$ 定义在 $(E \setminus S_1) \cap (E \setminus S_2) = E \setminus (S_1 \cup S_2)$ 上. 而 $m_*(S_1 \cup S_2) \leqslant m_*(S_1) + m_*(S_2) = 0$, 故 $S_1 \cup S_2$ 为零测集. 从而, $f+g$ a.e. 定义在 E 上. 因此, 性质 1.11 (ii) 当 f 和 g 为 a.e. 有限值时仍成立. 进一步, 上面所有的性质中的条件均可减弱为 a.e. 成立即可. 我们给出几乎处处收敛的定义.

定义 1.27. 设 $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ 及 f 是定义在 $E \subset \mathbb{R}^n$ 上的广义实值函数. 若存在 E 中的点集 Z, 满足 $m(Z) = 0$ 及对 $x \in E \setminus Z$ 有 $\lim\limits_{k\to\infty} f_k(x) = f(x)$, 则称 $\{f_k(x)\}$ 在 E 上几乎处处收敛于 $f(x)$, 并记为

$$f_k(x) \to f(x), \quad \text{a.e. } x \in E.$$

§ 1.3.2 用简单函数或阶梯函数逼近

我们对可测函数的结构给出进一步的刻画.

定理 1.28 (非负简单函数逼近定理). 设 f 是 $\mathbb{R}^n$ 上的非负可测函数, 则存在单调递增且收敛于 f 的非负简单函数列 $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$, 即 $\forall x$,

$$\varphi_k(x) \leqslant \varphi_{k+1}(x), \quad 且 \lim_{k\to\infty} \varphi_k(x) = f(x).$$

定理 1.29 (简单函数逼近定理). 设 f 是 $\mathbb{R}^n$ 上的可测函数, 则存在简单函数列 $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$, s.t. $|\varphi_k(x)| \leqslant |f(x)|$, 且有

$$\lim_{k\to\infty} \varphi_k(x) = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

注记 1.30. (i) 定理 1.28中若极限允许取 $+\infty$, 则结论对取 $[0,\infty]$ 的函数也成立, 定理 1.29中亦可作相应的修改.

(ii) 定理 1.28 – 定理 1.29中的 $\mathbb{R}^n$ 可以换成可测集 $E \subset \mathbb{R}^n$.

下面我们用阶梯函数来逼近.

定理 1.31 (阶梯函数逼近定理). 设 $f: \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ 可测, 则存在阶梯函数列 $\{\psi_k\}_{k=1}^{\infty}$ 几乎处处收敛于 f.

§ 1.3.3 Littlewood 三原则

虽然可测集和可测函数代表着新工具, 但我们不能忽视了它们与旧概念的联系. Littlewood 以三个原则的形式总结了这些联系, 在该理论的早期研究中提供了有用的直观上的引导, 即

(i) 可测集 “差不多” 是区间的有限并; (定理 1.14 (iv))

(ii) 可测函数 “差不多” 是连续函数; (Lusin 定理)

(iii) 可测函数列的点态收敛 “差不多” 是一致收敛. (Egorov 定理)

需要把握的是 “差不多” 这个词, 在每个上下文中应被适当理解. 先回顾一下收敛的一些概念.

设 $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是定义在 E 上的函数列, 有许多不同的方式使 $\{f_n\}$ 可能收敛到一个极限函数 f. 例如:

(i) f_n 逐点收敛于 f, 即 $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x), \forall x \in E$.

(ii) f_n 几乎处处收敛于 f, 即 $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x), \forall$ a.e. $x \in E$.

(iii) f_n 一致收敛于 f, 即 $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sup\limits_{x\in E} |f(x) - f_n(x)| \right) = 0$, 记作 $f_n \xrightarrow{\text{u.}} f$.

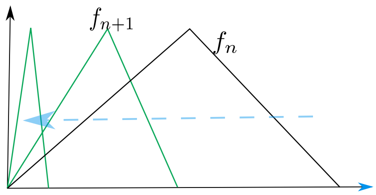
三者之间的关系如下:

$$\text{一致收敛} \Longrightarrow \text{逐点收敛} \Longrightarrow \text{几乎处处收敛}.$$

下面的例子说明, 一般情况下, 逐点收敛并不一定一致收敛.

例 1.32 (收缩三角形). 设 $E=[0,1]$, 对每个 $n\in\mathbb{N}$, 令 f_n 为 $[0,1]$ 上的连续函数, 定义为

$$f_n(x)=\begin{cases}0, & x=0,\\ \text{线性}, & 0<x<\frac{1}{2n},\\ 1, & x=\frac{1}{2n},\\ \text{线性}, & \frac{1}{2n}<x<\frac{1}{n},\\ 0, & \frac{1}{n}\leqslant x\leqslant 1.\end{cases}$$



则对每个固定的 $x\in[0,1]$, 当 $n\to\infty$ 时有 $f_n(x)\to 0$. 因此, f_n 逐点收敛到 0. 然而, f_n 并不一致收敛于零函数, 因为 $\forall n\in\mathbb{N}$, 有

$$\sup_{x\in[0,1]}|f_n(x)-0|=1.$$

虽然这个例子中的 $f_n(x)$ 在 $[0,1]$ 上不一致收敛, 但我们可以找到 $[0,1]$ 的子集, 使其在子集上一致收敛. 例如, 若 $0<\delta<1$, 则对所有足够大的 n, f_n 限制在 $[\delta,1]$ 上为零函数. 这样无论 δ 取多小, 我们总可以得到在 $[\delta,1]$ 上一致收敛.

我们将证明的 Egorov 定理, 说明这个例子是典型的: 若可测函数列在有限可测集上几乎处处收敛, 则存在一个大的子集, 使它们在上面一致收敛. 这也是原理 (iii) 的一个确切的表述.

定理 1.33 (Egorov 定理). 设 $f,f_1,\cdots,f_k,\cdots$ 是可测集 E 上几乎处处有限的可测函数, 且 $m(E)<\infty$. 若 $f_k(x)\to f(x)$, a.e. $x\in E$, 则对任意给定的 $\varepsilon>0$, 存在闭集 $A_\varepsilon\subset E$, 使得 $m(E\setminus A_\varepsilon)\leqslant\varepsilon$, 且 f_k 在 A_ε 上一致收敛于 f.

Egorov 定理实际上是 Severini 在 1910 年首先用意大利语证明的, 一年后 Egorov 发表了他独立证明的结果, 并广泛传播, 从而以他的名字命名, 故也称作 Egorov-Severini 定理.

注记 1.34. (i) Egorov 定理中的条件 $m(E)<\infty$ 不能去掉.

(ii) Egorov 定理的结论不一定能加强到 "存在可测集 F, s.t. $m(E\setminus F)=0$, f_n 在 F 上一致收敛于 f".

(iii) 粗略地说, Egorov 定理把可测函数列收敛的非一致性大部分一致化, 有时 Egorov 定理的结论 (将 "闭集" 换成 "可测集") 也被称为近一致收敛或几

乎一致收敛.

定义 1.35. 设 $\{f_n\}, f$ 在可测集 $E \subset \mathbb{R}^n$ 上可测, 称 $\{f_n\}$ 在 E 上近一致收敛于 f, 记为 $f_n \xrightarrow{\text{a.u.}} f$, 若 $\forall \varepsilon > 0, \exists$ 可测集 $A \subset E$, s.t. $m(A) < \varepsilon$ 且 f_n 在 $E \setminus A$ 上一致收敛于 f.

不难证明, Egorov 定理的逆成立.

命题 1.36 (Egorov 逆定理). 设可测集 E 上可测函数列 $\{f_n\}$ 近一致收敛于 $f(x)$, 则 $\{f_n\}$ 几乎处处收敛于 f.

接下来, 我们来看另一种重要的收敛性(cf. [周 16, p.115-118]).

定义 1.37. 设 $f(x), f_1(x), \cdots, f_k(x), \cdots$ 是可测集 $E \subset \mathbb{R}^n$ 上几乎处处有限的可测函数. 若 $\forall \varepsilon > 0$, 有

$$\lim_{k \to \infty} m(\{x \in E : |f_k(x) - f(x)| \geqslant \varepsilon\}) = 0,$$

则称 $\{f_k(x)\}$ 在 E 上依测度收敛于 $f(x)$, 记为 $f_k \xrightarrow{m} f$.

在函数几乎处处相等的意义下, 依测度收敛的极限函数是唯一的.

命题 1.38. 若 $\{f_k(x)\}$ 在 E 上同时依测度收敛于 $f(x)$ 与 $g(x)$, 则 $f = g$ a.e.

从几乎处处收敛与依测度收敛的定义可以看出, 前者强调的是在某点处函数值的收敛 (尽管除一个零测集外), 后者并非指在哪个点处的收敛, 其要点在于点集

$$\{x \in E : |f_k(x) - f(x)| \geqslant \varepsilon\}$$

的测度应随 k 趋于无穷而趋于 0, 而不论此点集的位置状态如何. 这是两者的区别, 下面我们来看它们之间的联系.

命题 1.39 (Lebesgue 定理). 设 $\{f_k(x)\}$ 是可测集 E 上几乎处处有限的可测函数列, 且 $m(E) < \infty$. 若 $\{f_k(x)\}$ 几乎处处收敛于几乎处处有限的函数 $f(x)$, 则在 E 上, $f_k \xrightarrow{m} f$.

命题 1.40. 设 $f(x), f_1(x), \cdots, f_k(x), \cdots$ 是可测集 E 上几乎处处有限的可测函数. 在 E 上, 若 $f_k \xrightarrow{\text{a.u.}} f$, 则 $f_k \xrightarrow{m} f$.

类似于点态收敛列与 Cauchy(或基本) 列的关系, 对于依测度收敛列也有类似的概念与结论.

定义 1.41. 设 $\{f_k(x)\}$ 是可测集 E 上几乎处处有限的可测函数列. 若 $\forall\varepsilon > 0$, 有

$$\lim_{k,j\to\infty} m(\{x\in E : |f_k(x) - f_j(x)| \geqslant \varepsilon\}) = 0,$$

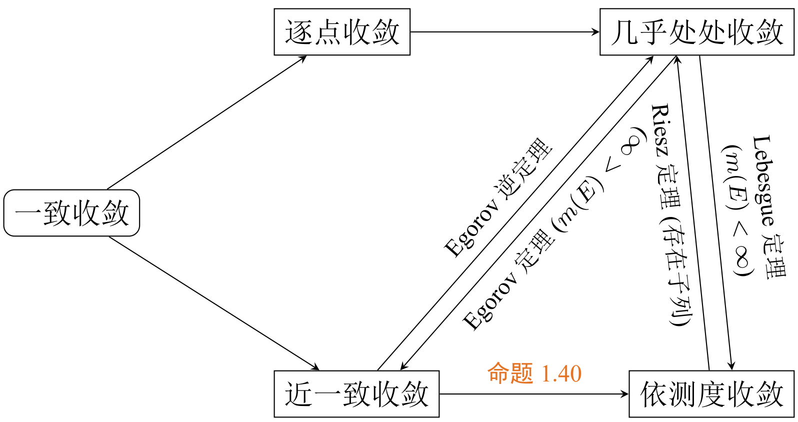
则称 $\{f_k(x)\}$ 为 E 上的依测度 Cauchy 列.

命题 1.42. 若 $\{f_k(x)\}$ 是可测集 E 上的依测度 Cauchy 列, 则在 E 上存在几乎处处有限的可测函数 $f(x)$, 使得在 E 上, $f_k \xrightarrow{m} f$.

注意, 若在 E 上 $f_k \xrightarrow{m} f$, 则 $\{f_k(x)\}$ 必是 E 上依测度 Cauchy 列. 此外, 从上述定理的证明中已经可以看到, 在依测度 Cauchy 列中一定可抽出一个子列是几乎处处收敛的, 从而有下述定理:

命题 1.43 (Riesz 定理)**.** 在可测集 E 上, 若 $f_k \xrightarrow{m} f$, 则存在子列 $\{f_{k_i}(x)\}$, 使得 $f_{k_i} \xrightarrow{\text{a.e.}} f$.

对几乎处处有限的广义实值函数, 几种收敛之间的关系总结如下图:



最后, 我们给出原则 (iii) 的相关论断.

定理 1.44 (Lusin 定理)**.** 设 f 为可测集 $E \subset \mathbb{R}^n$ 上的 a.e. 有限的可测函数. 则对任给的 $\varepsilon > 0$, 存在闭集 $F_\varepsilon \subset E$, 使得 $m(E \setminus F_\varepsilon) \leqslant \varepsilon$ 且 $f|_{F_\varepsilon}$ 连续 (也称 f 在 E 上拟连续).

注记 1.45. (i) 此定理中 f 在闭集 F_ε 上连续, 是指 f 关于 F_ε 连续, 并不是 "f 关于 E 的连续点集是 F_ε". 粗略地说, Lusin 定理是把可测函数的不连续性局部连续化了. 例如,

(ii) Lusin 定理中取 $\varepsilon = 0$ 时不一定成立, 这说明 Lusin 定理不能再改进.

Lusin 定理的逆命题也成立, 即

命题 1.46 (Lusin 逆定理). 设 $E \subset \mathbb{R}^n$ 可测, f 在 E 上 a.e. 有限. 若 $\forall \delta > 0$, 存在闭集 $F_\delta \subset E$, 使得 $m(E \setminus F_\delta) < \delta$ 且 f 是 F_δ 上的连续函数, 则 f 在 E 上可测.

由于 Lusin 定理及其逆定理给出了可测函数的刻画, 因此, Lusin 定理可以作为可测函数的定义, 它说明可测函数就是具有拟连续性的函数.