第二章

积分论

§2.1 Lebesgue 积分: 基本性质和收敛定理

本节我们从简单函数的 Lebesgue 积分开始, 逐步深入到一般可测函数的积分. 在每一阶段, 我们将看到, 积分满足的基本性质, 如线性和单调性. 我们将证明合适的收敛定理来说明积分和极限的换序条件. 最后, 将会得到积分的一般理论, 它们在更深入问题的研究中起着决定性作用.

我们分四个阶段:

1. 简单函数,
2. 支撑在有限可测集上的有界函数,
3. 非负函数,
4. 一般实值及复值可测函数.

从现在开始, 所有函数均假定为可测的. 开始时我们仅考虑有限实值函数, 之后也会考察广义实值函数及复值函数.

§ 2.1.1 阶段一: 简单函数

回顾简单函数的定义:

$$\varphi(x)=\sum_{k=1}^{N} a_k\chi_{E_k}(x), \tag{2.1}$$

其中 E_k 是有限可测集, a_k 为常数. 这个表达式并不唯一, 为了方便, 我们采用(2.1)的规范表示, 即 $\{a_k\}$ 是互异且非零, 而 $\{E_k\}$ 互不相交, 则其规范表示是唯一的.

寻找 φ 的规范表示可用直接的方式: 因 φ 仅取有限多个互异的非零值, 如: $c_1,\cdots,c_M$, 令 $F_k=\{x:\varphi(x)=c_k\}$, 则 F_k 互不相交. 从而 $\varphi=\sum\limits_{k=1}^{M} c_k\chi_{F_k}$ 即为 φ 的规范表示.

定义 2.1. 设 φ 是简单函数, 具有规范表示 $\varphi(x)=\sum\limits_{k=1}^{M} c_k\chi_{F_k}(x)$, 则定义 φ 的Lebesgue 积分为

$$\int_{\mathbb{R}^n}\varphi(x)dx=\sum_{k=1}^{M} c_k m(F_k).$$

若 $E\subset\mathbb{R}^n$ 为有限可测集, 则 $\varphi(x)\chi_E(x)$ 也是简单函数, 定义

$$\int_E\varphi(x)dx=\int_{\mathbb{R}^n}\varphi(x)\chi_E(x)dx.$$

为了强调积分定义中的 Lebesgue 测度 m, 有时 φ 的 Lebesgue 积分也写作

$$\int_{\mathbb{R}^n}\varphi(x)dm(x).$$

实际上, 为了方便, $\mathbb{R}^n$ 上 φ 的积分经常写为 $\int\varphi(x)dx$ 或 $\int\varphi$.

命题 2.2. 简单函数的积分满足以下性质:

(i) (表示方式的无关性). 若 $\varphi=\sum\limits_{k=1}^{N} a_k\chi_{E_k}$ 是 φ 的任意表示, 则

$$\int\varphi=\sum_{k=1}^{N} a_k m(E_k).$$

(ii) (线性). 若 φ,ψ 为简单函数, $a,b\in\mathbb{R}$, 则

$$\int(a\varphi+b\psi)=a\int\varphi+b\int\psi.$$

(iii) (可加性). 若 E,F 为 $\mathbb{R}^n$ 中的不交有限可测集, 则

$$\int_{E\cup F}\varphi=\int_E\varphi+\int_F\varphi.$$

(iv) (单调性). 若 φ, ψ 为实值简单函数且 $\varphi \leqslant \psi$, 则

$$\int \varphi \leqslant \int \psi.$$

(v) (三角不等式). 若 φ 是简单函数, 则 $|\varphi|$ 也是, 且

$$\left|\int \varphi\right| \leqslant \int |\varphi|.$$

需要指出的是: 当 f 和 g 是一对 a.e. 相等的简单函数时, 有 $\int f = \int g$. 这个等式在之后给出的积分定义中也成立. 实际上, 令 $E_0 = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \neq g(x)\}$, 则 $m(E_0) = 0$. $f - g$ 亦为简单函数, 其规范表示为 $\sum\limits_{k=1}^{N} a_k \chi_{E_k}$, 其中 $E_k \subset E_0$, 故 $m(E_k) = 0$, 从而

$$\int (f - g) = \sum_{k=1}^{N} a_k m(E_k) = 0.$$

§ 2.1.2 阶段二: 支撑在有限可测集上的有界函数

定义 2.3. 设 $E \subset \mathbb{R}^n$ 可测和 f 可测, 若对 $x \in E^c$, 有 $f(x) = 0$, 则称 f支撑在 E 上. 通常将可测函数 f 的非零点集的闭包称为 f 的支集, 记为:

$$\operatorname{supp} f = \overline{\{x : f(x) \neq 0\}}.$$

因 $\operatorname{supp} f$ 为闭集, 故可测, 但与上述 E 一般没有包含关系. 下面将考察那些有界的可测函数.

若 f 可测, 则由简单函数逼近定理 (定理 1.29) 知, 存在简单函数列 $\{\varphi_k\}$, 使得

$$|\varphi_k(x)| \leqslant |f(x)| \text{ 且 } \lim_{k\to\infty} \varphi_k(x) = f(x), \ \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

从而, 若 f 支撑在有限可测集 E 上, 且 $|f(x)| \leqslant M$, 则 $\forall k \in \mathbb{N}, x \in E$, $|\varphi_k(x)| \leqslant M$. 若 $x \in E^c$, 则 $|\varphi_k(x)| \leqslant |f(x)| = 0$, 故 φ_k 也支撑在 E 上.

引理 2.4. 设 f 是支撑在有限可测集 E 上的有界函数. 若 $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ 是支撑在 E 上一致有界的简单函数列, 且 $\varphi_k(x) \xrightarrow{\text{a.e.}} f(x)$, 则

(i) 极限 $\lim\limits_{k\to\infty} \int \varphi_k$ 存在.

(ii) 若 $f = 0$ a.e., 则 $\lim\limits_{k\to\infty} \int \varphi_k = 0$.

有了此引理, 我们可以定义支撑在有限可测集 E 上的有界函数 f 的积分.

定义 2.5. 设 f 是支撑在有限可测集 E 上的可测函数, 且 $|f| \leqslant M$. 定义 f 的Lebesgue 积分为

$$\int f(x)dx = \lim_{k\to\infty} \int \varphi_k(x)dx,$$

其中 $\{\varphi_k\}$ 是支撑在 E 上满足 $|\varphi_k| \leqslant M$ 和 $\varphi_k \xrightarrow{\text{a.e.}} f$ 的任意简单函数列.

由引理 2.4知这个极限是存在的. 下面, 我们必须证明该积分是良定的, 即 $\int f$ 不依赖于所使用的极限序列 $\{\varphi_k\}$. 因此, 假设 $\{\psi_k\}$ 是另一支撑在 E 上的简单函数列, s.t. $|\psi_k| \leqslant M$, 且 $\psi_k \xrightarrow{\text{a.e.}} f$. 令

$$\eta_k = \varphi_k - \psi_k,$$

则 η_k 支撑在 E 上, $|\eta_k| \leqslant 2M$, $\eta_k \xrightarrow{\text{a.e.}} 0$. 由引理 2.4 (ii) 可得 $\lim\limits_{k\to\infty} \int \eta_k = 0$, 又由 (i) 知 $\int \varphi_k$, $\int \psi_k$ 的极限均存在, 故有

$$\lim_{k\to\infty} \int \varphi_k = \lim_{k\to\infty} \int \psi_k.$$

设可测函数 f 在有限可测集 E 上有界, 则可定义

$$\int_E f(x)dx = \int f(x)\chi_E(x)dx.$$

显然, 若 f 是简单函数, 则上述定义与之前定义的简单函数的积分是一致的. 这个积分定义的拓展满足简单函数积分的所有基本性质.

命题 2.6. 设 f, g 是支撑在有限可测集上的有界函数, 则下列性质成立:

(i) (线性). 若 $a, b \in \mathbb{R}$, 则 $\int (af + bg) = a\int f + b\int g$.

(ii) (可加性). 若 $E, F \subset \mathbb{R}^n$ 互不相交, 则 $\int_{E\cup F} f = \int_E f + \int_F f$.

(iii) (单调性). 若 $f \leqslant g$, 则 $\int f \leqslant \int g$.

(iv) (三角不等式). $|f|$ 也是支撑在有限可测集上的有界函数, 且 $|\int f| \leqslant \int |f|$.

所有这些性质均可用简单函数逼近及命题 2.2中简单函数积分的性质得到.

现在来证明第一个收敛定理, 其中的 (a.e.) 表示可选项, 即删掉或保留所有 (a.e.) 结论均成立.

定理 2.7 (Lebesgue 有界收敛定理 (LBCT))**.** 设 $\{f_k\}$ 是支撑在有限可测集 E 上的一致有界的可测函数列, 且 $f_k(x) \xrightarrow{\text{(a.e.)}} f(x)$, $k \to \infty$. 则 f 是可测的, (a.e.) 有界的, (a.e.) 支撑在 E 上, 且

$$\int |f_k - f| \to 0, \quad k \to \infty.$$

进而,
$$\int f_k \to \int f, \quad k \to \infty.$$

上述收敛定理是关于 $\int$ 与 lim 交换次序的, 它的结论简单地说, 即
$$\lim_{k\to\infty} \int f_k = \int \lim_{k\to\infty} f_k.$$

命题 2.8. 若 $f \geqslant 0$ 是支撑在有限可测集上的有界函数且 $\int f = 0$, 则 $f = 0$ a.e.

§2.1.3 Lebesgue 积分与 Riemann 积分的关系

至此, 我们基本上建立了支撑在有限可测集上的有界函数的 Lebesgue 积分理论, 在进一步发展 Lebesgue 积分理论之前, 我们先来揭示它与 Riemann 积分的关系. 本节仅讨论一维的情形.

为了方便, 我们将定义在 $[a,b]$ 上的有界函数 $f(x)$ 的 Riemann 积分记为 $\int_{[a,b]}^{\mathcal{R}} f(x)dx$.

下面的定理说明, 在有界闭区间上 Riemann 可积蕴含着 Lebesgue 可积.

定理 2.9. 设 f 在闭区间 $[a,b]$ 上 Riemann 可积, 则 f 可测, 且
$$\int_{[a,b]}^{\mathcal{R}} f(x)dx = \int_{[a,b]}^{\mathcal{L}} f(x)dx,$$
其中左边积分为 Riemann 积分, 右边积分为 Lebesgue 积分.

§2.1.4 阶段三: 非负函数

现在, 我们考虑非负可测函数但不必有界. 允许这些函数取广义值, 即可以在可测集上取值 $+\infty$. 若一正数集合是无界的, 则定义该集合的上确界为 $+\infty$.

定义 2.10. 对上述非负可测函数 f, 定义它的 (广义)Lebesgue 积分为
$$\int f(x)dx = \sup \int g(x)dx,$$
其中上确界是关于所有支撑在有限可测集上的有界可测函数 g, 且满足 $0 \leqslant g \leqslant f$, 取的.

在以上定义之下, 只有两种可能性, 上确界要么有限, 要么无限. 在有限的情形, $\int f(x)dx < \infty$, 则称 f 是Lebesgue 可积的, 或简称为可积的.

显然, 若 $E \subset \mathbb{R}^n$ 可测, $f \geqslant 0$, 则 $f\chi_E \geqslant 0$, 定义

$$\int_E f(x)dx = \int f(x)\chi_E(x)dx.$$

命题 2.11. 非负可测函数的积分有如下性质:

(i) (线性). 若 $f, g \geqslant 0, a, b > 0$, 则 $\int(af + bg) = a\int f + b\int g$.
(ii) (可加性). 若 $E, F \subset \mathbb{R}^n$ 互不相交, $f \geqslant 0$, 则 $\int_{E\cup F} f = \int_E f + \int_F f$.
(iii) (单调性). 若 $0 \leqslant f \leqslant g$, 则 $\int f \leqslant \int g$.
(iv) 若 g 可积, $0 \leqslant f \leqslant g$, 则 f 可积.
(v) 若 f 可积, 则 $f(x) < \infty$ a.e.
(vi) 若 $f \geqslant 0, \int f = 0$, 则 $f(x) = 0$ a.e.

下面来看非负可测函数的一些重要收敛定理. 先来看一个问题. 设 $f_k \geqslant 0$, $f_k(x) \xrightarrow{\text{a.e.}} f(x)$, 那么是否有

$$\int f_k \to \int f\ ?$$

不幸的是, 下面的例子给出了否定的回答. 令

$$f_k(x) = \begin{cases} n, & 0 < x < \frac{1}{n}, \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$$

则 $f_k(x) \to 0$, 但 $\int f_k(x)dx = 1$, 即有

$$\int \lim f_k < \lim \int f_k.$$

这正好代表了一般情形.

引理 2.12 (Fatou 引理)**.** 设 $\{f_k\}$ 是非负可测函数列. 若 $f_k(x) \xrightarrow{\text{a.e.}} f(x)$, 则

$$\int f \leqslant \liminf_{n\to\infty} \int f_k.$$

特别地, 我们并没有排除 $\int f = \infty$ 或 $\liminf\limits_{n\to\infty} \int f_k = \infty$ 的情形.

现在, 我们给出一些推论.

推论 2.13. 设 $f, \{f_k\}$ 均为非负可测函数 (列), $f_k(x) \leqslant f(x)$ a.e. 且 $f_k(x) \xrightarrow{\text{a.e.}} f(x)$, 则

$$\lim_{n\to\infty} \int f_k = \int f.$$

特别地, 对非负可测函数类, 我们可以得到一个基本的收敛定理. 它的叙述需要下面的记号. 之前用符号 $\nearrow$ 和 $\searrow$ 分别表示集合列的递增和递减. 类似地,

当可测函数列 $\{f_k\}_{n=1}^{\infty}$ 满足

$$f_k(x) \leqslant f_{n+1}(x) \text{ a.e.}, \forall n \in \mathbb{N} \text{ 且 } \lim_{n\to\infty} f_k(x) = f(x) \text{ a.e.}$$

时记为 $f_k \nearrow f$. 当

$$f_k(x) \geqslant f_{n+1}(x) \text{ a.e.}, \forall n \in \mathbb{N} \text{ 且 } \lim_{n\to\infty} f_k(x) = f(x) \text{ a.e.}$$

时记为 $f_k \searrow f$. 从而, 由推论 2.13立得:

推论 2.14 ((Beppo Levi/Lebesgue) 单调收敛定理 (MCT)). 令 $\{f_k\}$ 是非负可测函数列且 $f_k \nearrow f$, 则

$$\lim_{n\to\infty} \int f_k = \int f.$$

单调收敛定理有如下有用的推论:

推论 2.15 ((Tonelli) 逐项积分定理). 对非负可测函数项级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k(x)$, 有

$$\int \sum_{k=1}^{\infty} a_k(x)dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int a_k(x)dx.$$

若 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \int a_k(x)dx$ 有限, 则级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k(x)$ 几乎处处收敛.

我们给出两个应用. 第一个是 Borel-Cantelli 引理的另一个证明.

例 2.16 (Borel-Cantelli 引理, (cf. [SS05, Ex.1.16])). 设 $\{E_k\}_{k=1}^{\infty}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的可测子集列, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} m(E_k) < \infty$. 令 $E = \{x \in \mathbb{R}^n :$ 存在无穷多个k s.t. $x \in E_k\} = \limsup\limits_{k\to\infty} E_k$, 则 $m(E) = 0$.

下面的例子将在第3章中讨论恒同逼近时要用到.

例 2.17. 设定义在 $\mathbb{R}^n$ 上的函数

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{|x|^{n+1}}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

则 f 在任何以原点为心的球外 (如 $|x| \geqslant \varepsilon$) 可积, 且存在 $C > 0$, 使得

$$\int_{|x|\geqslant\varepsilon} f(x)dx \leqslant \frac{C}{\varepsilon}.$$

例 2.18. 考虑函数

$$f_a(x) = \begin{cases} |x|^{-a}, & |x| \leqslant 1, \\ 0, & |x| > 1. \end{cases}$$

$$F_a(x) = \frac{1}{1+|x|^a}, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

(易知在广义 Riemann 积分意义下, 当 $a < n$ 时 f_a 可积, 当 $a > n$ 时 F_a 可积.) 证明 Lebesgue 积分 $\int f_a < \infty$ $(a < n)$ 及 $\int F_a < \infty$ $(a > n)$.

§ 2.1.5 阶段四: 一般情形

设 f 是 $\mathbb{R}^n$ 上的任意实值可测函数, 若 $|f|$ 在阶段三意义下可积, 则称 f 是 Lebesgue 可积的 (或简称可积的).

若 f 可积, 令

$$f^+(x) = \max(f(x), 0), \quad f^-(x) = \max(-f(x), 0).$$

显然, $f^+, f^- \geqslant 0$ 且 $f^+ - f^- = f$. 因 $f^\pm \leqslant |f|$, 故由 f 可积可得 f^+ 和 f^- 可积 (命题 2.11 (iv)), 从而可以定义 f 的 Lebesgue 积分为

$$\int f = \int f^+ - \int f^-.$$

在实践中, 我们会遇到很多分解 $f = f_1 - f_2$, f_1, f_2 均为非负可积函数, 那我们自然会期望 $\int f$ 不依赖于 f 的分解, 总有

$$\int f = \int f_1 - \int f_2.$$

实际上, 假设 $f = g_1 - g_2$ 为另一分解, g_1, g_2 均非负可积. 则由 $f_1 - f_2 = g_1 - g_2$ 可得 $f_1 + g_2 = g_1 + f_2$, 故由非负可测函数积分的线性性可得

$$\int f_1 + \int g_2 = \int g_1 + \int f_2.$$

因这些积分均是有限的, 故

$$\int f_1 - \int f_2 = \int g_1 - \int g_2.$$

从而, 可得 $\int f$ 的值不依赖于其分解.

在考察以上定义时, 下面一些小观察是有用的. f 的可积性和积分值在零测集上任意改变 f 的取值的情况下是不变的. 因此, 在可积性的上下文中可以允许函数在零测集上没有定义. 进而, 若 f 可积, 则由命题 2.11 (v) 知 $f(x)$ 几乎处处有限. 故此, 我们总是可以将两个可积函数 f, g 相加, 因为 $f + g$ 取广义值

的点仍落在一零测集内. 还有, 就是我们说一个函数 f 时, 实际上是指所有与 f 几乎处处相等的等价类.

由定义与之前证明的性质即可得到积分的基本性质.

命题 2.19. Lebesgue 可积函数的积分是线性的、可加的、单调的、且满足三角不等式.

现在来看两个后面要用到的结果.

命题 2.20. 设 f 在 $\mathbb{R}^n$ 上可积, 则对任意的 $\varepsilon > 0$:

(i) 存在有限可测集 B(比如, 球), 使得

$$\int_{B^c} |f| < \varepsilon.$$

(ii) (积分的绝对连续性). 存在一个 $\delta > 0$, 使得只要 $m(E) < \delta$, 就成立

$$\int_E |f| < \varepsilon.$$

直观上, 由于可积函数积分有限, 函数本身应该在某种意义下在无穷远处消失, 命题的第 (i) 部分对这个直观给出了准确的表述. 然而, 我们也观察到, 可积性并不一定保证当 $|x|$ 变得很大时, 函数本身逐点趋于零. (cf. [SS05, Ex.2.6])

我们现在准备证明 Lebesgue 积分理论中最重要的结果之一, 即控制收敛定理. 它为极限与积分的次序的交换提供了一个充分条件.

定理 2.21 (Lebesgue 控制收敛定理 (LDCT)). 设 $\{f_n\}$ 为可测函数列, 当 $n \to \infty$ 时 $f_n(x) \xrightarrow{\text{a.e.}} f(x)$. 若 $|f_n(x)| \leqslant g(x)$, 其中 g 可积, 则

$$\int |f_n - f| \to 0, \quad n \to \infty.$$

因此,

$$\int f_n \to \int f, \quad n \to \infty.$$

通常称 $g(x)$ 为函数列 $\{f_n\}$ 的控制函数.

§2.1.6 复值函数

设 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$, 可以写为

$$f(x) = u(x) + iv(x),$$

其中 u, v 是实值函数, 分别称为 f 的实部和虚部.

若 $|f(x)| = (u^2(x)+v^2(x))^{1/2}$ 是 Lebesgue 可积的, 则称 f 可积. 显然, $|u(x)| \leqslant |f(x)|, |v(x)| \leqslant |f(x)|$. 由不等式 $(a+b)^{1/2} \leqslant a^{1/2}+b^{1/2}, a, b > 0$, 可得

$$|f(x)| \leqslant |u(x)|+|v(x)| \leqslant 2|f(x)|,$$

故复值函数可积当且仅当它的实部和虚部可积. 因此, f 的 Lebesgue 积分可定义为

$$\int f(x)dx = \int u(x)dx + i\int v(x)dx.$$

最后, 设 $E \subset \mathbb{R}^n$ 可测, f 是 E 上的复值可测函数, 若 $f\chi_E$ 在 $\mathbb{R}^n$ 上可积, 则称 f 在 E 上 Lebesgue 可积, 并定义

$$\int_E f = \int f\chi_E.$$

在可测集 $E \subset \mathbb{R}^n$ 上的所有复值可积函数的全体构成一个 $\mathbb{C}$ 上的线性空间. 实际上, 若 f, g 可积, 则由三角不等式 $|f(x)+g(x)| \leqslant |f(x)|+|g(x)|$ 及单调性知

$$\int_E |f+g| \leqslant \int_E |f| + \int_E |g| < \infty,$$

从而, $f+g$ 可积. 若 $a \in \mathbb{C}$, f 可积, 则 af 可积. 最后, 在 $\mathbb{C}$ 上的积分仍满足线性性质.

§ 2.2 可积函数空间 L^1

§ 2.2.1 完备性和稠密函数类

上一节末，我们知道 $\mathbb{C}$ 上的可积函数构成一个线性空间.

下面, 我们在线性空间中引入范数.

定义 2.22. 设 X 是实 (或复) 线性空间, 若对 X 中每个元素 x, 都有一个实数, 记为 $\|x\|$, 与之对应, 且满足

(i) 正定性: $\|x\| \geqslant 0$, 且 $\|x\| = 0 \iff x = 0$(零元);

(ii) 齐次性: $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$, 这里 α 是实 (或复) 数;

(iii) 三角不等式: $\|x+y\| \leqslant \|x\|+\|y\|$, $(y \in X)$,

则称 X 为实 (或复)赋范线性空间, $\|x\|$ 称为元素 x 的范数. (与线性空间类似, 常略去 “实 (或复)” 等词.)

对于赋范线性空间 X, 我们用

$$\rho(x,y)=\|x-y\|,\quad x,y\in X,$$

定义元素 x 与 y 之间的度量. 容易证明, 这样定义的度量满足度量的三个条件, 因此 X 按照度量 ρ 是一个度量空间.

X 既然是度量空间, 自然就有点列的收敛. 按照度量空间中收敛的定义, X 中点列 $\{x_n\}$ 收敛于点 $x\in X$ 是指

$$\rho(x_n,x)=\|x_n-x\|\to 0,\quad n\to\infty.$$

我们自然而然地称 $\{x_n\}$ 依范数收敛于 x, 也称 $\{x_n\}$ 强收敛于 x, 记为 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x$(强) 或 $x_n\xrightarrow{\|\cdot\|}x$, $n\to\infty$. 在不会引起混淆时, 简记为

$$\lim_{n\to\infty}x_n=x,\quad \text{或}\ x_n\to x.$$

应用范数的条件可以证明以下几个性质:

(i) 在 X 中, 若 $x_n\xrightarrow{\|\cdot\|}x$, 则 $\{\|x_n\|\}$ 有界.
(由 $\|x_n\|\leqslant\|x_n-x\|+\|x\|$ 即得.)

(ii) 在 X 中, 若 $x_n\xrightarrow{\|\cdot\|}x$, $y_n\xrightarrow{\|\cdot\|}y$, 则 $x_n+y_n\xrightarrow{\|\cdot\|}x+y$.
(由 $\|(x_n+y_n)-(x+y)\|\leqslant\|x_n-x\|+\|y_n-y\|$ 即得.)

(iii) 设数列 $\alpha_n\to\alpha$, X 中 $x_n\xrightarrow{\|\cdot\|}x$, 则 $\alpha_nx_n\xrightarrow{\|\cdot\|}\alpha x$.
(由

$$\begin{aligned}\|\alpha_nx_n-\alpha x\|\leqslant&\|\alpha_nx_n-\alpha x_n\|+\|\alpha x_n-\alpha x\|\\=&|\alpha_n-\alpha|\|x_n\|+|\alpha|\|x_n-x\|,\end{aligned}$$

以及 $\{\|x_n\|\}$ 的有界性即得.)

接下来, 我们定义 $\mathbb{R}^n$ 上可积函数 f 的范数为

$$\|f\|_{L^1}=\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}=\int_{\mathbb{R}^n}|f(x)|dx.$$

具有以上范数的所有可积函数的全体记为 $L^1(\mathbb{R}^n)$. 容易验证 $\|\cdot\|_{L^1}$ 在几乎处处相等的等价类意义下满足范数的三个条件, 故 $L^1(\mathbb{R}^n)$ 为赋范线性空间. 另外, $\rho(f,g)=\|f-g\|_{L^1}$ 定义了 $L^1(\mathbb{R}^n)$ 上的度量, 故 $L^1(\mathbb{R}^n)$ 亦为度量空间. 上述性质总结如下:

命题 2.23. 设 $f,g\in L^1(\mathbb{R}^n)$.

(i) $\|af\|_{L^1}=|a|\|f\|_{L^1}, \forall a\in\mathbb{C}$.

(ii) $\|f+g\|_{L^1}\leqslant\|f\|_{L^1}+\|g\|_{L^1}$.

(iii) $\|f\|_{L^1}=0\iff f=0$ a.e.

(iv) $\rho(f,g)=\|f-g\|_{L^1}$ 定义了 $L^1(\mathbb{R}^n)$ 上的一个度量.

我们完备化 Riemann 可积函数空间的主要目标通过下述定理即可实现.

定理 2.24 (Riesz-Fischer 定理)**.** 线性空间 L^1 依它的度量是完备的.

由于每个依范数收敛的序列均为依该范数的 Cauchy 列, 故由定理证明中的论断可得以下结论.

推论 2.25. 若 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 在 L^1 中依范数收敛于 f, 则存在子列 $\{f_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$, 使得

$$f_{n_k}\xrightarrow{\text{a.e.}} f.$$

有许多函数类在 L^1 中稠密, 归结在下面的定理中. 当遇到证明一些有关可积函数的论断或等式时是有用的, 往往所证结果对一些作了限制的函数类容易证明, 然后可以再用稠密性得到一般结果.

定理 2.26 (L^1 中稠密函数类)**.** 下面的函数类在 $L^1(\mathbb{R}^n)$ 中稠密:

(i) 简单函数.

(ii) 阶梯函数.

(iii) 具有紧支集的连续函数 (其全体可记为 $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n)$).

$L^1(\mathbb{R}^n)$ 的上述结果可以推广到正可测集 E 上, 即若 $E\subset\mathbb{R}^n$, 且 $m(E)>0$, 则定义 $L^1(E)$ 为 E 上所有可积函数的全体. 对 $f\in L^1(E)$, 可以延拓到 $L^1(\mathbb{R}^n)$, 在 E 上令 $\tilde{f}=f$, 在 E^c 上令 $\tilde{f}=0$, 则可定义

$$\|f\|_{L^1(E)}=\|\tilde{f}\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}=\int_E|f|dx.$$

命题 2.23和定理 2.24的类似结果对 $L^1(E)$ 也成立.

§2.2.2 不变性质

令 f 为定义在 $\mathbb{R}^n$ 上的函数, $h\in\mathbb{R}^n$, f 的 h平移定义为

$$f_h(x)=f(x-h).$$

首先, 有积分的平移不变性. 即, 若 f 可积, 则 f_h 可积且

$$\int_{\mathbb{R}^n}f(x-h)dx=\int_{\mathbb{R}^n}f(x)dx. \tag{2.2}$$

先验证 $f=\chi_E$ 的情形, 其中 E 可测. 显然, $f_h=\chi_{E_h}$, 其中 $E_h=\{x+h: x\in E\}$. 由测度的平移不变性知 $m(E_h)=m(E)$, 故结论成立. 由积分的线性性可得(2.2)对所有的简单函数成立. 若 f 是非负函数, 则由简单函数逼近定理 (定理 1.28), 存在一列简单函数 $\{\varphi_n\}$, 使得 $\varphi_n\nearrow f$ a.e., 从而 $(\varphi_n)_h\nearrow f_h$

a.e., 由单调收敛定理可得(2.2)成立. 若 f 是复值可积函数, 由上述论断可得 $\int_{\mathbb{R}^n}|f(x-h)|dx=\int_{\mathbb{R}^n}|f(x)|dx$, 即 $f_h\in L^1(\mathbb{R}^n)$ 且 $\|f_h\|_{L^1}=\|f\|_{L^1}$. 由定义可得(2.2)对任意的 $f\in L^1$ 成立.

其次, 应用 Lebesgue 测度关于伸缩和反射的相关不变性可得到: 若 f 可积, 则 $f(\delta x),\delta>0$ 和 $f(-x)$ 也可积, 且

$$\delta^n\int_{\mathbb{R}^n}f(\delta x)dx=\int_{\mathbb{R}^n}f(x)dx,\quad \int_{\mathbb{R}^n}f(-x)dx=\int_{\mathbb{R}^n}f(x)dx. \tag{2.3}$$

下面来看两个有用的结果.

(i) 设 f,g 是 $\mathbb{R}^n$ 上的一对可测函数, 并且对某个固定 $x\in\mathbb{R}^n$, 函数 $y\mapsto f(x-y)g(y)$ 是可积的, 则函数 $y\mapsto f(y)g(x-y)$ 也是可积的, 且

$$\int_{\mathbb{R}^n}f(x-y)g(y)dy=\int_{\mathbb{R}^n}f(y)g(x-y)dy. \tag{2.4}$$

实际上, 左边 $\overset{(2.2)}{=\!=}\int_{\mathbb{R}^n}f(-y)g(y+x)dy\overset{(2.3)}{=\!=}$ 右边. 左边的积分记作 $(f*g)(x)$, 定义为 f 和 g 的卷积. (2.4)表明了卷积的可交换性.

(ii) 由(2.3)可得, $\forall\varepsilon>0$,

$$\int_{|x|\geqslant\varepsilon}\frac{dx}{|x|^a}=\int_{\mathbb{R}^n}\frac{\chi_{\{|x|\geqslant\varepsilon\}}(x)}{|x|^a}dx \tag{2.5}$$

$$\overset{(2.3)}{=\!=}\varepsilon^{n-a}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{\chi_{\{|x|\geqslant1\}}(x)}{|x|^a}dx \tag{2.6}$$

$$=\varepsilon^{n-a}\int_{|x|\geqslant1}\frac{1}{|x|^a}dx. \tag{2.7}$$

同理,

$$\int_{|x|\leqslant\varepsilon}\frac{dx}{|x|^a}=\varepsilon^{n-a}\int_{|x|\leqslant1}\frac{1}{|x|^a}dx. \tag{2.8}$$

由例 2.18知, 当 $a<n$ 时(2.8)中积分有限. 当 $|x|\geqslant1$ 时 $\frac{1}{|x|^a}\leqslant\frac{2}{1+|x|^a}$, 而由例 2.18知, 当 $a>d$ 时 $\int\frac{1}{1+|x|^a}dx<\infty$, 故 $a>n$ 时(2.5)中积分有限.

§ 2.2.3　平移与连续性

接下来, 我们考察 f 的连续性如何与 f_h 随 h 的变化相联系. 注意到 $\forall x\in\mathbb{R}^n$, "$f_h(x)\to f(x),h\to0$" 等同于 "f 在 x 连续".

然而, 一般可积函数 f, 即使修正零测集上的值, 也可能在每个点 x 不连续, (cf. [SS05, Ex. 2.15]). 虽然如此, 但还是有一个在范数意义下对每个 $f\in L^1(\mathbb{R}^n)$ 都成立的总体连续性.

命题 2.27 (平均连续性). 设 $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$，则

$$\lim_{h\to 0} \|f_h - f\|_{L^1} = 0.$$

§ 2.3 Fubini 定理

在连续函数的重积分运算中经常使用累次积分进行计算. 我们现在从 Lebesgue 积分的一般观点来检验这个重要的解析工具.

一般地, 我们可以将 $\mathbb{R}^n$ 写成乘积形式

$$\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2}, \quad n = n_1 + n_2,\ n_1, n_2 \geqslant 1.$$

$\mathbb{R}^n$ 中的点可取形式 (x, y), $x \in \mathbb{R}^{n_1}$, $y \in \mathbb{R}^{n_2}$. 有了这个分解, 引入固定一个变量所形成的截口或截面的概念就变得自然.

定义 2.28. 设 f 是 $\mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2}$ 上的函数, f 相应于 $y \in \mathbb{R}^{n_2}$ 的截□定义为

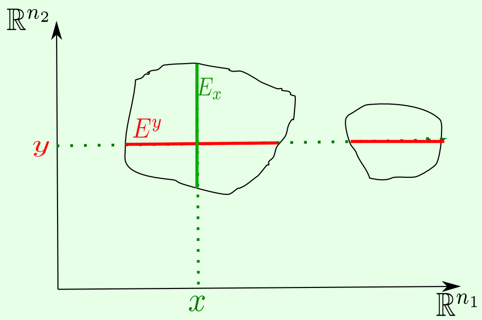
$$f^y(x) = f(x, y).$$

类似地, f 相应于 $x \in \mathbb{R}^{n_1}$ 的截□定义为

$$f_x(y) = f(x, y).$$

对于 $E \subset \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2}$ 的情形, 定义它的截面为

$$E^y = \{x \in \mathbb{R}^{n_1} : (x, y) \in E\}, \quad E_x = \{y \in \mathbb{R}^{n_2} : (x, y) \in E\}.$$



§ 2.3.1 定理的叙述与证明

以下是主要定理, 据定义所有可积函数都是可测的.

定理 2.29 (Fubini 定理). 设 $n = n_1 + n_2$, $f(x, y)$ 在 $\mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2}$ 上可积, 则对几乎每个 $y \in \mathbb{R}^{n_2}$:

(i) 截口 f^y 在 $\mathbb{R}^{n_1}$ 上可积.

(ii) 由 $\int_{\mathbb{R}^{n_1}} f^y(x)dx$ 定义的函数在 $\mathbb{R}^{n_2}$ 上可积.

(iii) $\int_{\mathbb{R}^{n_2}} \left(\int_{\mathbb{R}^{n_1}} f(x,y)dx\right) dy = \int_{\mathbb{R}^n} f$.

上面的定理并不是完全直接的, 这从它的叙述中不难看出第一个困难就是涉及讨论中的函数和集合的可测性. 实际上, 即使 f 在 $\mathbb{R}^n$ 上可测, 也不能保证对每个 y, 其截口 f^y 在 $\mathbb{R}^{n_1}$ 中可测, 更不能保证对每个 y, 其截面 E^y 可测. 比如, 在 $\mathbb{R}^2$ 中, 把一个一维的不可测集放在 x 轴, 则该集合 E 为 $\mathbb{R}^2$ 上的零测集, 但对 $y=0$, E^y 是不可测的. 然而, 幸运的是, 对几乎所有截口或截面来说可测性是成立的.

显然, 该定理关于 x 和 y 对称. 我们也可以得到对 a.e. x, f_x 在 $\mathbb{R}^{n_2}$ 上可积, 由 $\int_{\mathbb{R}^{n_2}} f_x(y)dy$ 定义的函数在 $\mathbb{R}^{n_1}$ 上可积, 并且

$$\int_{\mathbb{R}^{n_1}} \left(\int_{\mathbb{R}^{n_2}} f(x,y)dy\right) dx = \int_{\mathbb{R}^n} f.$$

特别地, Fubini 定理说的是 f 在 $\mathbb{R}^n$ 上的积分可以通过累次计算低维的积分来计算, 而且累次积分可以以任何次序进行:

$$\int_{\mathbb{R}^{n_2}} \left(\int_{\mathbb{R}^{n_1}} f(x,y)dx\right) dy = \int_{\mathbb{R}^{n_1}} \left(\int_{\mathbb{R}^{n_2}} f(x,y)dy\right) dx = \int_{\mathbb{R}^n} f.$$

§ 2.3.2 Fubini 定理的应用

定理 2.30 (Tonelli 定理)**.** 设 $f(x,y)$ 是 $\mathbb{R}^{n_1}\times\mathbb{R}^{n_2}$ 上的非负可测函数, 则对几乎每个 $y\in\mathbb{R}^{n_2}$:

(i) f^y 在 $\mathbb{R}^{n_1}$ 上可测.

(ii) $\int_{\mathbb{R}^{n_1}} f^y(x)dx$ 在 $\mathbb{R}^{n_2}$ 上可测.

(iii) 在广义意义下, $\int_{\mathbb{R}^{n_2}} \left(\int_{\mathbb{R}^{n_1}} f(x,y)dx\right) dy = \int_{\mathbb{R}^n} f(x,y)dxdy$.

在实践中, 此定理常与 Fubini 定理共同使用, 然而为了方便引用, 将 Fubini 定理 (定理 2.29), Tonelli 定理 (定理 2.30) 及后面的推论 2.31统一为 Fubini 定理来进行引用. 实际上, 若给定一个 $\mathbb{R}^n$ 上的可测函数 f, 要求计算 $\int_{\mathbb{R}^n} f$ 时, 我们首先要对 $|f|$ 使用该定理来验证是否可用累次积分. 若它们是有限的, 则 Tonelli 定理保证了 f 是可积的, 即 $\int |f| < \infty$, 即验证了 Fubini 定理的假设, 从而在 f 的积分计算中可以使用那个定理.

推论 2.31. 若 E 在 $\mathbb{R}^{n_1}\times\mathbb{R}^{n_2}$ 上可测, 则对 a.e. $y\in\mathbb{R}^{n_2}$, 截面

$$E^y = \{x\in\mathbb{R}^{n_1} : (x,y)\in E\}$$

是 $\mathbb{R}^{n_1}$ 中的可测子集. 进而, $m(E^y)$ 是关于 y 的可测函数, 且

$$m(E)=\int_{\mathbb{R}^{n_2}} m(E^y)dy.$$

这是将 Tonelli 定理 (i) 应用到 χ_E 的直接结果. 显然, 对 x-截面有同样结果.

我们已经建立了如下基本事实: 若 E 在 $\mathbb{R}^{n_1}\times\mathbb{R}^{n_2}$ 中可测, 则对 a.e. $y\in\mathbb{R}^{n_2}$ 截面 E^y 在 $\mathbb{R}^{n_1}$ 中可测, 同样地, 对 a.e. $x\in\mathbb{R}^{n_1}$, 截面 E_x 在 $\mathbb{R}^{n_2}$ 中可测. 人们或许试图认为反过来的结论也成立. 但事实上并非如此, 见下例.

例 2.32. 令 $\mathcal{N}$ 为 $\mathbb{R}$ 的不可测子集, 定义

$$E=[0,1]\times\mathcal{N}\subset\mathbb{R}\times\mathbb{R},$$

则有

$$E^y=\begin{cases}[0,1], & y\in\mathcal{N},\\ \varnothing, & y\notin\mathcal{N}.\end{cases}$$

显然, 对任意 y, E^y 可测. 然而, 若 E 可测, 则由推论 2.31可得 $E_x=\{y\in\mathbb{R}:(x,y)\in E\}$ 对 a.e. $x\in\mathbb{R}$ 亦可测, 但这是不对的, 因为对所有 $x\in[0,1]$, $E_x=\mathcal{N}$ 为不可测集.

例 2.33. 一个更震撼的例子是单位正方形 $[0,1]\times[0,1]$ 内的集合 E 不可测, 但 E^y, E_x 均可测, 且 $m(E^y)=0, m(E_x)=1, \forall x,y\in[0,1]$.

E 的构造基于实数的极为反常的序 $\prec$, 它具有如下性质: 对每个 $y\in\mathbb{R}$, $\{x\in\mathbb{R}: x\prec y\}$ 是至多可列的. (这个序的存在性依赖于连续统假设: 只要 S 是 $\mathbb{R}$ 的无穷子集, 那么 S 要么可列, 要么具有 $\mathbb{R}$ 的势. 见 [SS05, Pb. 2.5], 这里不详述.) 给定这个序, 令

$$E=\{(x,y)\in[0,1]\times[0,1]: x\prec y\}.$$

注意到对每个 $y\in[0,1]$, $E^y=\{x: x\prec y\}$ 至多可列, 从而 $m(E^y)=0$. 类似地, 因 $E_x=\{y\in[0,1]: x\prec y\}=[0,1]\setminus\{y\in[0,1]: y\prec x\}$ 是 $[0,1]$ 内的一个至多可列集的补集, 故 $m(E_x)=1$. 若 E 可测, 则由推论 2.31可得 $m(E)=\int_0^1 m(E^y)dy=0$, 且 $m(E)=\int_0^1 m(E_x)dx=1$, 产生矛盾, 故 E 不可测.

当我们把 $\mathbb{R}^n$ 当成乘积集 $\mathbb{R}^{n_1}\times\mathbb{R}^{n_2}$ 时, 它们的子集 E 与截面 E_x, E^y 相关联, 即乘积集 $E=E_1\times E_2$, $E_j\subset\mathbb{R}^{n_j}$.

命题 2.34. 若 $E=E_1\times E_2$ 为 $\mathbb{R}^n$ 中的可测子集, 且 $m_*(E_2)>0$, 则 E_1 可测.

为了处理上述结果的逆, 需要下述引理.

引理 2.35. 若 $E_1 \subset \mathbb{R}^{n_1}, E_2 \subset \mathbb{R}^{n_2}$, 则

$$m_*(E_1 \times E_2) \leqslant m_*(E_1)m_*(E_2).$$

若 E_j 当中至少有一个外测度为 0, 则 $m_*(E_1 \times E_2) = 0$.

命题 2.36. 设 $E_1 \subset \mathbb{R}^{n_1}$ 和 $E_2 \subset \mathbb{R}^{n_2}$ 均可测, 则 $E = E_1 \times E_2 \subset \mathbb{R}^n$ 可测, 且

$$m(E) = m(E_1)m(E_2).$$

若 E_j 中至少有一个为零测集, 则 $m(E) = 0$.

作为此命题的一个推论, 我们有

推论 2.37. 设 f 是 $\mathbb{R}^{n_1}$ 上的可测函数, 则由 $\tilde{f}(x, y) = f(x)$ 所定义的函数 $\tilde{f}$ 在 $\mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2}$ 上可测.

接下来, 我们回到微积分中 Riemann 广义积分概念的一个解释. 我们已知道 $\int f$ 描述的是 f 的图像下的 "面积". 这里, 我们将其与 Lebesgue 积分相关联, 并说明如何将它推广到一般情形.

推论 2.38. 设 f 是 $\mathbb{R}^n$ 上的非负函数, 记 $y = f(x)$ 在 $\mathbb{R}^n$ 上的下方图像为

$$\mathcal{A} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : 0 \leqslant y \leqslant f(x)\},$$

则

(i) f 在 $\mathbb{R}^n$ 上可测当且仅当 $\mathcal{A}$ 在 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中可测.

(ii) 若 (i) 中条件成立, 则 $\int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx = m(\mathcal{A})$.

最后, 给出一个有用的结果.

命题 2.39. 设 f 是 $\mathbb{R}^n$ 上的可测函数, 则 $\tilde{f}(x, y) = f(x - y)$ 在 $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ 上可测.