第三章

微分与积分

早在学微积分时, 我们就已经知道微分和积分互为逆运算. 对前两章所学的一般理论, 我们重新验证这个基本的思想. 那我们的目标就是在现在的框架下建立并证明微积分基本定理, 并发展一些遇到的概念. 想要达到这个目标, 我们需要回答两个问题:

1° 设 $f \in L^1([a,b])$, $F(x) = \int_a^x f(y)dy$ 为其不定积分, 这是否蕴含着 F 可微 (至少 a.e. x), 且 $F' = f$?

对这个问题的肯定回答依赖于一些广泛应用的思想, 且并不局限于一维情形.

2° 对 $[a,b]$ 上的函数 F 施加什么条件才能保证 $F'(x)$ 存在 (a.e. x), 并且使得这个函数可积, 进而

$$F(b) - F(a) = \int_a^b F'(x)dx\ ?$$

然而, 对这个问题我们将从比第一个问题更狭小的角度去讨论, 但它所引发的问题是深刻的, 并且其结果是深远的, 特别地, 这个问题与曲线的可求长问题相关联.

§3.1 积分的微分

我们先从第一个问题开始, 即研究积分的微分. 若 f 在 $[a,b]$ 上可积, 令

$$F(x)=\int_a^x f(y)dy, \quad a\leqslant x\leqslant b.$$

为了求 $F'(x)$, 我们回忆一下导数的定义, 即下面的商

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h}$$

当 $h\to 0$ 时的极限. 对 $h>0$ 的情形, 有

$$\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(y)dy=\frac{1}{|I|}\int_I f(y)dy,$$

其中 $I=(x,x+h)$, $|I|$ 表示这个区间的长度. 上面这个表达式即 f 在 I 上的均值, 当 $|I|\to 0$ 时, 我们期望这些均值趋于 $f(x)$.

把问题的提法稍微变一下, 我们可以问

$$\lim_{\substack{|I|\to 0\\ x\in I}}\frac{1}{|I|}\int_I f(y)dy=f(x)$$

对合适的点 x 是否成立? 在高维情形, 我们也可以提类似的问题, 其中 f 的均值在适当的集合上取, 这些集合是一维区间的推广.

首先, 我们取这些集合为包含 x 的球 B, 而将区间 I 的长度 $|I|$ 替换成球的测度 $m(B)$. 然后, 就会看到作为这种特殊情形的推论, 类似的结果对那些具有 "有界离心率" (将在本节末定义) 的一般集簇也成立.

有了这个想法, 我们在 $\mathbb{R}^n$ $(n\in\mathbb{N})$ 中重新叙述第一个问题.

设 $f\in L^1(\mathbb{R}^n)$. 对 a.e. x, 下列等式

$$\lim_{\substack{|B|\to 0\\ x\in B}}\frac{1}{|B|}\int_B f(y)dy=f(x)$$

是否成立?

我们称上述问题为均值问题. 若 B 是 $\mathbb{R}^n$ 中半径为 r 的任意球, 则 $m(B)=V_n r^n$, 其中 V_n 为单位球的测度.

当然, 当 f 在 x 连续时, 极限的确收敛于 $f(x)$. 由于连续, $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$, s.t. 当 $|x-y|<\delta$ 时 $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$, 从而取 B 为含 x 半径小于 $\delta/2$ 的球时,

$$\begin{aligned}\left|f(x)-\frac{1}{m(B)}\int_B f(y)dy\right| &=\frac{1}{m(B)}\left|\int_B (f(x)-f(y))dy\right|\\ &\leqslant\frac{1}{m(B)}\int_B |f(x)-f(y)|\,dy\\ &<\varepsilon.\end{aligned}$$

虽然均值问题有肯定性的回答, 但为了建立这个事实，我们需要做一些定量估计来确定均值的总体行为, 这将会通过 $|f|$ 的极大均值来完成.

§ 3.1.1 Hardy-Littlewood 极大函数

我们下面考察的极大函数最初是由 Hardy-Littlewood 就一维情形提出的, 所包含的概念在分析中有普遍的意义, 定义如下.

定义 3.1. 若 $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, 定义它的极大函数 f^* 为

$$f^*(x) = \sup_{B \ni x} \frac{1}{m(B)} \int_B |f(y)| dy, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

其中上确界对所有包含 x 的开球取.

换句话说, 我们将均值问题中的 lim 用 sup, f 用 $|f|$ 来替换. f^* 的主要性质概括如下.

定理 3.2 (Hardy-Littlewood 极大函数定理). 设 $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, 则

(i) f^* 可测.

(ii) $f^*(x) < \infty$, a.e. x.

(iii) $\forall \alpha > 0$, f^* 满足

$$m(\{x \in \mathbb{R}^n : f^*(x) > \alpha\}) \leqslant \frac{A}{\alpha} \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}, \tag{3.1}$$

其中 $A = 3^n$.

形如(3.1)的不等式称为弱型不等式, 这是因为它比 L^1 范数的不等式弱. 实际上, 由简单的Tchebychev 不等式, i.e., $\forall \alpha > 0$,

$$m(\{x : |g(x)| > \alpha\}) \leqslant \frac{1}{\alpha} \|g\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}$$

即可得到. 我们可能想由 f 的可积性得到 f^* 可积. 然而, 这并不成立, (3.1)已经是所能得到的最好结果.(cf. [SS05, Ex.3.4, 3.5]) (3.1)中的常数 A 对我们来说并不重要, 我们所关心的是它不依赖于 α 和 f.

为了证明 (iii), 我们需要先引进 Vitali 覆盖定理.

引理 3.3 (Vitali 覆盖定理 I). 设 $\mathcal{B} = \{B_1, B_2, \cdots, B_N\}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中开球的有限簇, 则存在 $\mathcal{B}$ 的互不相交的子簇 $B_{i_1}, B_{i_2}, \cdots, B_{i_k}$ 使得

$$m\left(\bigcup_{\ell=1}^N B_\ell\right) \leqslant 3^n \sum_{j=1}^k m(B_{i_j}).$$

§ 3.1.2 Lebesgue 微分定理与 Lebesgue 集

由极大函数估计可以得到之前均值问题的解答.

定理 3.4. 若 $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, 则

$$\lim_{\substack{m(B)\to 0\\ B\ni x}} \frac{1}{m(B)} \int_B f(y)dy = f(x), \quad \forall x, a.e. \tag{3.2}$$

将此定理应用于 $|f|$ 直接可得 $f^*(x) \geqslant |f(x)|$ a.e. x.

我们一直在 f 可积的假设下进行讨论, 这个"整体"的假设在讨论可微性这样的局部概念时有点不太恰当. 实际上, 上述定理中的极限是对收缩到 x 的球取的, 从而与远离 x 点的 f 的行为无关. 因此, 我们期望: 若仅假设 f 在每个球上可积, 其结果仍成立.

定义 3.5. 称 $\mathbb{R}^n$ 上的可测函数 f 是局部可积的, 若对每个球 B, 函数 $f(x)\chi_B(x)$ 是可积的. 将所有局部可积函数所构成的空间记作 $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$.

粗略地说, 在无穷远处的行为不影响函数的局部可积性, 如 $e^{|x|}$ 和 $|x|^{-1/2}$ 均局部可积但在 $\mathbb{R}^n$ 上不可积.

显然, 上个定理在局部可积这个更弱的条件下亦成立.

定理 3.6 (Lebesgue 微分定理). 若 $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$, 则

$$\lim_{\substack{m(B)\to 0\\ B\ni x}} \frac{1}{m(B)} \int_B f(y)dy = f(x), \quad \forall x, a.e.$$

定理的第一个应用是对可测集本质的一个有趣的洞察.

定义 3.7. 若 E 是可测集且 $x \in \mathbb{R}^n$ 满足

$$\lim_{\substack{m(B)\to 0\\ B\ni x}} \frac{m(B\cap E)}{m(B)} = 1,$$

则称 x 是 E 的Lebesgue 密集点 (或全密点).

粗略地说, 这个条件是说: 环绕 x 的小球几乎完全被 E 覆盖. 确切地说, $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, s.t. 当 $m(B) < \delta$ 且 $x \in B$ 时 $1 - \frac{m(B\cap E)}{m(B)} \leqslant \varepsilon$, 即 $\frac{m(B\cap E)}{m(B)} \geqslant 1 - \varepsilon$. 取 $\alpha = 1 - \varepsilon$, 即对每个靠近 1 的 $\alpha < 1$ 及每个包含 x 的半径充分小的球, 有

$$m(B\cap E) \geqslant \alpha m(B).$$

因此, E 至少覆盖 B 的 α 部分. Lebesgue 密集点反映了 Lebesgue 可测集中的点在一点附近高度密集的情况.

将 Lebesgue 微分定理 (定理 3.6) 应用到 E 的特征函数上, 可立即得到下面的结论.

推论 3.8 (Lebesgue 密度定理)**.** 设 $E \subset \mathbb{R}^n$ 可测, 则

(i) 几乎每个点 $x \in E$ 都是 E 的密集点.

(ii) 几乎每个点 $x \notin E$ 都不是 E 的密集点.

若将 E 的所有 Lebesgue 密集点的全体记为 $\Phi(E)$, 则 (i) 即 $m(E \setminus \Phi(E)) = 0$, (ii) 即 $m(\Phi(E) \setminus E) = m(E^c \setminus (\Phi(E))^c) = 0$. 合并即为 $m(E \Delta \Phi(E)) = 0$.

下面我们来看可积函数的另一个概念, 可以替代逐点连续性.

定义 3.9. 设 $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$, 则 f 的Lebesgue 集为所有使 $f(x)$ 有限且满足

$$\lim_{\substack{m(B)\to 0\\ B\ni x}} \frac{1}{m(B)} \int_B |f(y) - f(x)| dy = 0$$

的点 $x \in \mathbb{R}^n$ 构成的集合.

对这个定义有两个简单的观察. 一是, f 的连续点必属于 f 的 Lebesgue 集; 二是, 对 f 的 Lebesgue 集中的点 x, 有

$$\lim_{\substack{m(B)\to 0\\ B\ni x}} \frac{1}{m(B)} \int_B f(y) dy = f(x).$$

故 $\{f$的连续点$\} \subset f$的 Lebesgue 集 $\subset \{$使上式处处成立的点$\}$.

推论 3.10. 若 $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$, 则几乎每个点都属于 f 的 Lebesgue 集.

注记 3.11. 由 §2.2中定义知, $L^1(\mathbb{R}^n)$ 中元素实际上是等价类, 若两个函数仅在零测集上不同, 则它们等价. 有趣的是, 使得(3.2)中收敛于一个极限的点集与所选 f 的表达式无关, 因为由 $f = g$ a.e. 得

$$\int_B f(y) dy = \int_B g(y) dy.$$

然而, f 的 Lebesgue 集依赖于所考察的 f 的具体表达式.

我们将看到一个函数的 Lebesgue 集具有一个通用性质: 函数在这些点的值可被一大类均值找回来. 我们将在比球更广泛的集合上和恒同逼近的框架下来证明这个结论. 到目前为止, 所建立的微分理论都是基于函数在球上的均值, 但正如我们先前所说, 我们也会问, 对其它集簇, 比如方体或长方体，类似结论是否成立? 其回答依赖于所讨论集簇的几何性质. 比如, 我们来看方体的情形 (和具有有界离心率的更一般集簇), 上述结果成立. 然而, 对所有长方体簇的情形, 其极限的几乎处处存在性和弱型不等式并不成立(cf. [SS05, Pb. 3.8]).

定义 3.12. 称集簇 $\{U_\alpha\}$正则收缩到 $\bar{x}$(或在 $\bar{x}$ 处具有有界离心率), 若存在一

个常数 $c>0$ 使得对每个 α, 存在一个球 B_α 满足

$$\bar{x}\in B_\alpha,\quad U_\alpha\subset B_\alpha,\ \text{且} m(U_\alpha)\geqslant cm(B_\alpha).$$

因此, U_α 包含在 B_α 内, 但它的测度与 B_α 的测度相当. 例如, 所有包含 $\bar{x}$ 的开方体正则收缩于 $\bar{x}$. 然而, 在 $\mathbb{R}^n$ ($n\geqslant 2$) 中, 所有包含 $\bar{x}$ 的开长方体并不正则收缩于 $\bar{x}$, 比如考察非常狭长的长方体即可看到这一点.

推论 3.13. 设 $f\in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$, 若 $\{U_\alpha\}$ 正则收缩于 $\bar{x}$, 则对 f 的 Lebesgue 集中的每个点 $\bar{x}$, 有

$$\lim_{\substack{m(U_\alpha)\to 0\\ U_\alpha\ni\bar{x}}}\frac{1}{m(U_\alpha)}\int_{U_\alpha}f(y)dy=f(\bar{x}).$$

§ 3.2 好核与恒同逼近

我们现在转到由卷积给出的函数的均值,

$$(f*K_\delta)(x)=\int_{\mathbb{R}^n}f(x-y)K_\delta(y)dy,$$

这里 $f\in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ 保持固定, K_δ 为核, 在一个特殊的函数簇上变化.

定义 3.14. 称函数簇 $\{K_\delta\}_{\delta>0}$ 为好核, 若存在常数 $A>0$, 使得

(i) $\int_{\mathbb{R}^n}K_\delta(x)dx=1$.

(ii) $\int_{\mathbb{R}^n}|K_\delta(x)|dx\leqslant A$.

(iii) $\forall\eta>0$, $\int_{|x|\geqslant\eta}|K_\delta(x)|dx\to 0$, $\delta\to 0$.

这些核的主要用途是: 只要 f 有界 ($|f(x)|\leqslant M$), 那么在 f 的每个连续点上, 当 $\delta\to 0$ 时, $f*K_\delta(x)\to f(x)$.

为了得到一个类似的结论, 且对 Lebesgue 集中所有点成立, 从某种程度上我们需要加强核 $\{K_\delta\}$ 的条件. 为区别这种情况, 我们采用不同的术语称这些核组成的较小范围的类为 “恒同逼近”. 我们仍然假设 K_δ 可积且满足条件 (i), 但用下面的条件替换 (ii) 和 (iii), 即

定义 3.15. 称函数簇 $\{K_\delta\}_{\delta>0}$ 为恒同逼近, 若存在常数 $A>0$, 使得

(i) $\int_{\mathbb{R}^n}K_\delta(x)dx=1$.

(ii′) $|K_\delta(x)|\leqslant A\delta^{-n}$, $\forall\delta>0$.

(iii′) $|K_\delta(x)|\leqslant A\delta/|x|^{n+1}$, $\forall\delta>0$, $x\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$.

我们观察到这些要求更强了, 且蕴含好核定义中的条件.

术语 “恒同逼近” 源于 “当 $\delta\to 0$ 时, 映射 $f\mapsto f*K_\delta$ 在多种意义下收敛

于恒同映射” 这一事实. 它与下面的启发性说明相联系.

右图勾画出一个典型的恒同逼近: 对每个 $\delta > 0$, 核支撑在集合 $|x| \leqslant \delta$ 上且高度为 $1/2\delta$. 当 $\delta \to 0$ 时, 这族核收敛到所谓的 “在原点的单位质量函数” 或 “Dirac delta 函数”, 启发性地定义为:

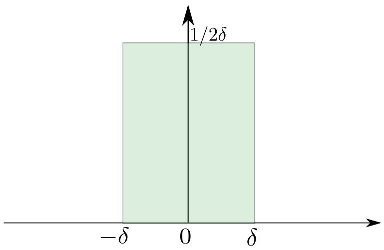


图 3.1: 一个恒同逼近

$$\mathcal{D}(x) = \begin{cases} \infty, & x = 0, \\ 0, & x \neq 0, \end{cases} \quad \text{且} \int \mathcal{D}(x)dx = 1.$$

因每个 $K_\delta = \frac{1}{2\delta}\chi_{[-\delta,\delta]}$ 的积分均为 1, 故可以粗略地说,

$$K_\delta \to \mathcal{D}, \quad \delta \to 0.$$

若考察

$$f * \mathcal{D} = \int f(x-y)\mathcal{D}(y)dy,$$

因当 $y \neq 0$ 时 $f(x-y)\mathcal{D}(y) = 0$, 故 $\mathcal{D}$ 的质量集中在 $y = 0$, 直观上我们可以期望

$$(f * \mathcal{D})(x) = f(x).$$

因此, $\mathcal{D}$ 对卷积来说起着单位元的作用. 当然, 上面的讨论只是形式化的. 先介绍一些恒同逼近的例子.

例 3.16. 设 $\varphi \geqslant 0$ 在 $\mathbb{R}^n$ 上有界, $\operatorname{supp}\varphi \subset \{|x| \leqslant 1\}$ 且 $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi = 1$. 若令 $K_\delta(x) = \delta^{-n}\varphi(\delta^{-1}x)$, 则 $\{K_\delta\}_{\delta>0}$ 是一个恒同逼近.

例 3.17. 上半平面的Poisson 核 (cf. [SS03, p.149, 157])

$$P_y(x) = \frac{1}{\pi}\frac{y}{x^2+y^2}, \quad x \in \mathbb{R},$$

其中 $\delta = y > 0$ 为参数.

例 3.18. $\mathbb{R}^n$ 中的热核 (cf. [SS03, p.156–157])

$$\mathcal{H}_t(x) = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} e^{-|x|^2/4t},$$

其中 $t > 0$, $\delta = t^{1/2}$.

接下来, 我们转到关于恒同逼近的一般结果, 以突出 Lebesgue 集的作用.

定理 3.19. 若 $\{K_\delta\}_{\delta>0}$ 是一恒同逼近, 且 $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, 则对 f 的 Lebesgue 集

中的每个点 x, 当 $\delta \to 0$ 时

$$(f * K_\delta)(x) \to f(x).$$

特别地, 上述极限几乎处处成立.

因 $\int K_\delta = 1$, 故

$$\begin{aligned}|(f * K_\delta)(x) - f(x)| &= \left|\int_{\mathbb{R}^n} [f(x-y) - f(x)]K_\delta(y)dy\right| \\ &\leqslant \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y) - f(x)||K_\delta(y)|dy.\end{aligned}$$

故只需证: 当 $\delta \to 0$ 时, 右边 $\to 0$. 为此, 我们引进一个引理.

引理 3.20. 设 $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, x 为 f 的 Lebesgue 集中的点. 令

$$\mathcal{A}(r) = \frac{1}{r^n}\int_{|y|\leqslant r} |f(x-y) - f(x)|dy, \quad \forall r > 0,$$

则 $\mathcal{A}(r)$ 关于 $r > 0$ 连续, 且当 $r \to 0$ 时 $\mathcal{A}(r) \to 0$. 进而, $\mathcal{A}(r)$ 是有界的, 即 $\forall r > 0, \exists M > 0$, s.t. $\mathcal{A}(r) \leqslant M$.

除了逐点收敛的结果外, 恒同逼近也提出了依 L^1-范数收敛.

定理 3.21. 设 $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $\{K_\delta\}_{\delta>0}$ 为一个好核 (或恒同逼近), 则 $\forall \delta > 0$,

$$(f * K_\delta)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)K_\delta(y)dy$$

是可积的, 且

$$\|f * K_\delta - f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \to 0, \quad \delta \to 0.$$

§ 3.3 函数的可微性 (1 维)

我们现在来看本章开始时所提出的第二个问题: 就是找到关于 F 的更强的条件以保证下式成立:

$$F(b) - F(a) = \int_a^b F'(x)dx. \tag{3.3}$$

有两个现象使这个等式的一般化出现问题.

1° 由于不可微函数的存在性 (存在无处可微的连续函数), 若仅仅假设 F 连续, 则(3.3)的右边可能无意义.

2° 即使 $F'(x)$ 对每个 x 均存在, F' 也不一定 (Lebesgue) 可积. (cf. [SS05, Ex. 3.12])

我们怎样克服这些困难?

一种方式是限制在那些作为可积函数的不定积分存在的函数类上. 至于如何刻画这样的函数, 可以通过研究更为广泛的函数类, 即有界变差函数. 这些函数与曲线可求长的问题有紧密联系, 那我们就从这种联系开始.

§ 3.3.1 有界变差函数

定义 3.22. 令 γ 为平面上由 $z(t) = (x(t), y(t))$, 其中 $a \leqslant t \leqslant b$ 所给出的参数化曲线. 这里 $x(t)$ 和 $y(t)$ 均为 $[a, b]$ 上的实值连续函数. 若存在 $M < \infty$, 使得对 $[a, b]$ 的任意分割 $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_N = b$, 成立

$$\sum_{j=1}^{N} |z(t_j) - z(t_{j-1})| \leqslant M, \tag{3.4}$$

则称曲线 γ 是可求长的.

由定义, 曲线的长度 $L(\gamma)$ 是左边和式对所有分割取的上确界, 即

$$L(\gamma) = \sup_{\text{分割}} \sum_{j=1}^{N} |z(t_j) - z(t_{j-1})|,$$

或者, $L(\gamma)$ 是满足(3.4)的所有 M 的下确界.

从几何的角度看, $L(\gamma)$ 是通过用折线逼近曲线, 并使分割越来越细时取这些折线长度的极限而得到的.

自然地, 我们可能会问: 对 $x(t)$ 和 $y(t)$ 施加什么解析条件才能保证曲线 γ 的可求长性? 特别地, $x(t)$ 和 $y(t)$ 的导数必须存在吗? 若如此, 是否有想要的公式

$$L(\gamma) = \int_a^b [(x'(t))^2 + (y'(t))^2]^{1/2} dt\,?$$

对于第一个问题的回答, 直接引到有界变差函数类, 这个类在微分学理论中起着关键性的作用.

定义 3.23. 设 $F(t)$ 是定义在 $[a, b]$ 上的复值函数, $\mathcal{P}$ 为该区间的一个分割 $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_N = b$. F 在这个分割 $\mathcal{P}$ 下的变差定义为

$$V_{\mathcal{P}}(F) = \sum_{j=1}^{N} |F(t_j) - F(t_{j-1})|.$$

若存在 $M < \infty$, 使得对所有分割 $\mathcal{P}$, 成立 $V_{\mathcal{P}}(F) \leqslant M$, 则称 F 为有界变差

函数, F 在 $[a,x]$(其中 $a\leqslant x\leqslant b$) 上的全变差定义为

$$T_F(a,x)=\sup\sum_{j=1}^{N}|F(t_j)-F(t_{j-1})|,$$

其中 sup 关于 $[a,x]$ 的所有分割取. $[a,b]$ 上的有界变差函数全体记为$\mathrm{BV}([a,b])$.

注记 3.24. 1) 在该定义中, 并未假定 F 连续, 但是当应用于曲线的情形时, 将假定 $F(t)=z(t)=x(t)+iy(t)$ 是连续的.

2) 若分割 $\tilde{\mathcal{P}}$ 是分割 $\mathcal{P}$ 的加细, 则 F 在 $\tilde{\mathcal{P}}$ 上的变差大于或等于 F 在 $\mathcal{P}$ 上的变差.

3) 设 $f\in\mathrm{BV}([a,b])$, 则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上是有界函数. 实际上, 考虑分割 $a<x<b$, 则由定义

$$|f(x)-f(a)|+|f(b)-f(x)|\leqslant M,$$

故 (注意: 定义中 f 不能取无穷值, 故 f 在端点的值均有限.)

$$|f(x)|\leqslant|f(x)-f(a)|+|f(a)|\leqslant M+|f(a)|.$$

4) $\mathrm{BV}([a,b])$ 构成一个线性空间.

下面来看有界变差函数与曲线可求长之间的关系.

定理 3.25. 一条由 $(x(t),y(t)),\ a\leqslant t\leqslant b$ 参数化的曲线可求长当且仅当 $x(t)$ 和 $y(t)$ 均为有界变差函数.

例 3.26. 若 F 是单调有界实值函数, 则 F 为有界变差函数.

例 3.27. 若 F 处处可微且 F' 有界, 则 F 为有界变差函数. 事实上, 若 $|F'|\leqslant M$, 则由中值定理可得

$$|F(x)-F(y)|\leqslant M|x-y|,\quad\forall x,y\in[a,b].$$

因此,

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{N}|F(t_j)-F(t_{j-1})|\leqslant&\sum_{j=1}^{N}M|t_j-t_{j-1}|\\ =&M\sum_{j=1}^{N}(t_j-t_{j-1})=M(b-a).\end{aligned}$$

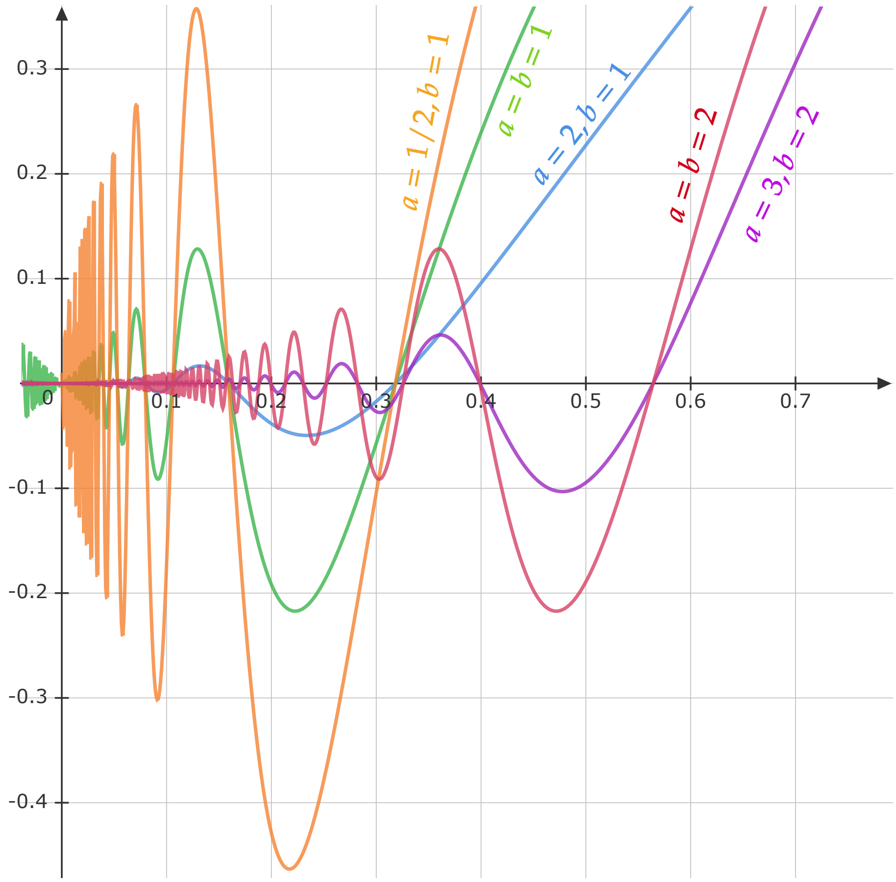
直观上, 有界变差函数不能以太大的振幅振荡得太频繁, 下面的例子有助于理解这一论断.

例 3.28. 令

$$F(x)=\begin{cases} x^a\sin(x^{-b}), & 0<x\leqslant 1,\\ 0, & x=0,\end{cases}$$

则 (留作习题)

$$F\in \mathrm{BV}([0,1]) \iff a>b.$$



上图说明了 $a>b$, $a=b$, $a<b$ 三种情形的差异. 这个例子说明了当 $a\leqslant b$ 时 $F\notin \mathrm{BV}([0,1])$, 同时这也说明了 “连续函数不一定是有界变差函数”.

定义 3.29. 设实值函数 $F\in \mathrm{BV}([a,b])$, F 在 $[a,x]$ 上的正变差定义为

$$P_F(a,x)=\sup\sum_{(+)}[F(t_j)-F(t_{j-1})],$$

其中求和是对所有使得 $F(t_j)\geqslant F(t_{j-1})$ 的 j 取, 且 sup 是对 $[a,x]$ 的所有分

割取. 而 F 在 $[a,x]$ 上的负变差定义为

$$N_F(a,x)=\sup\sum_{(-)}-[F(t_j)-F(t_{j-1})],$$

其中求和是对所有使得 $F(t_j)\leqslant F(t_{j-1})$ 的 j 取, 且 sup 是对 $[a,x]$ 的所有分割取.

引理 3.30. 设实值函数 $F\in \mathrm{BV}([a,b])$, 则 $\forall x\in[a,b]$, 有

$$F(x)-F(a)=P_F(a,x)-N_F(a,x),$$

且

$$T_F(a,x)=P_F(a,x)+N_F(a,x).$$

定理 3.31 (Jordan 分解定理). 实值函数 $F\in \mathrm{BV}([a,b])$ 当且仅当 $F(x)=F_1(x)-F_2(x)$, 其中 F_1,F_2 均为有界递增函数.

作为一个推论, 一个复值有界变差函数为四个有界递增函数的复线性组合, 即分别对实部和虚部用 Jordan 分解定理.

回到由连续函数 $z(t)=x(t)+iy(t)$ 参数化的曲线 γ, 我们对它的长度函数做进一步的理解.

假设曲线是可求长的, 定义 $L(A,B)$ 为 γ 中 $t\in[A,B]$ 所对应的像的片段的长度, 其中 $a\leqslant A\leqslant B\leqslant b$. 令 $F(t)=z(t)$, 则有

$$L(A,B)=T_F(A,B).$$

一般地, 有下面的结论.

命题 3.32. 若 $A\leqslant C\leqslant B$, 则

$$L(A,C)+L(C,B)=L(A,B). \tag{3.5}$$

命题 3.33. $L(A,B)$ 关于 A 和 B 连续.

上述结论表明: 连续的有界变差函数的全变差也是连续的.

下一个结果是微分理论的核心定理.

定理 3.34. 若 $F\in \mathrm{BV}([a,b])$, 则 F 几乎处处可微.

换言之, 商

$$\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}$$

几乎对每个 $x \in [a,b]$ 存在. 据 Jordan 分解定理, 只需考虑 F 递增的情形. 为了简单起见, 我们先假定 F 连续, 对于一般情形, 我们留到下一节来研究有界变差函数可能的不连续点的本质, 并将其归结为 "跳跃函数" 的情形.

先从 Riesz 得到的一个漂亮的技术性引理开始, 它具有覆盖论证的效果.

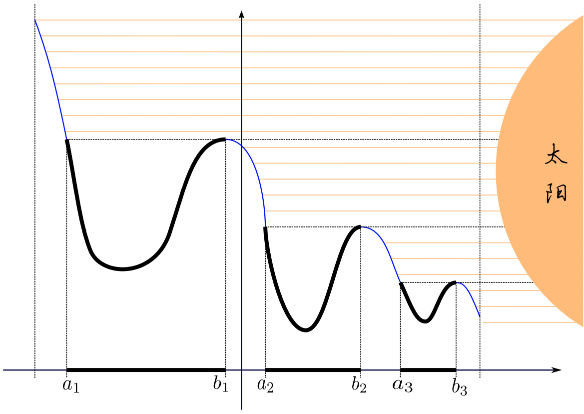
引理 3.35 (旭日 (Rising sun) 引理). 设 G 是 $\mathbb{R}$ 上的实值连续函数. 令 E 为使得对某个 $h = h_x > 0$,

$$G(x+h) > G(x)$$

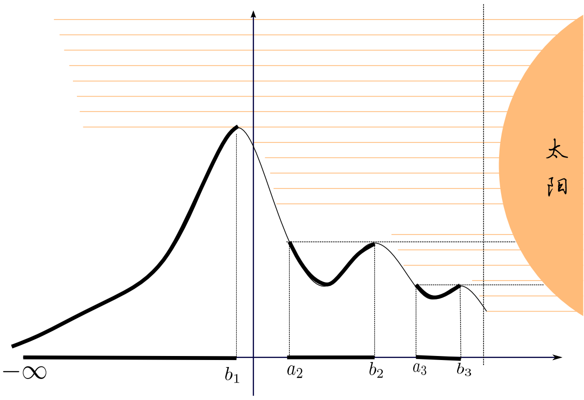
成立的点 x 的集合. 若 E 非空, 则它必为开集, 因此可以写成可数个互不相交开区间的并 $E = \cup(a_k, b_k)$. 若 (a_k, b_k) 是这个并集中的一个有限区间, 则

$$G(b_k) = G(a_k).$$

注记 3.36. 1) 基于下面的理由, 这个结果有时称为 "旭日引理". 若我们想象太阳从东方 (右边) 升起而光线平行于 x 轴, 则 G 的图像上的点 $(x, G(x))$, $x \in E$ 恰好是阴影中的点, 这些点即下图中的粗体部分.



2) 第二个结论中区间有限是必要的.



对旭日引理的证明稍作修改即得:

推论 3.37. 设 G 为闭区间 $[a,b]$ 上的实值连续函数. 若 E 表示 (a,b) 中使得对某个 $h>0$, $G(x+h)>G(x)$ 成立的点 x 的集合. 则 E 要么是空集, 要么是开集. 若为后者, 则 E 为可数个互不相交开区间 (a_k,b_k) 的并, 且除去 $a=a_k$ 时仅有 $G(a_k)\leqslant G(b_k)$ 的可能外, 均有 $G(a_k)=G(b_k)$.

设 F 是 $[a,b]$ 上的实值函数, 对固定的 $x\in[a,b]$, 记

$$\Delta_h F(x)=\frac{F(x+h)-F(x)}{h}.$$

考虑如下定义的在 x 处的四个Dini 数(统称为Dini 导数):

$$\begin{aligned}
D^+F(x)&=\limsup_{h\to 0^+}\Delta_h F(x), \quad (\text{右上极限}),\\
D_+F(x)&=\liminf_{h\to 0^+}\Delta_h F(x), \quad (\text{右下极限}),\\
D^-F(x)&=\limsup_{h\to 0^-}\Delta_h F(x), \quad (\text{左上极限}),\\
D_-F(x)&=\liminf_{h\to 0^-}\Delta_h F(x), \quad (\text{左下极限}).
\end{aligned}$$

显然有 $D_+\leqslant D^+$, $D_-\leqslant D^-$.

命题 3.38. 设 F 为 $[a,b]$ 上的实值递增连续函数, 则函数 $D_\pm F$ 和 $D^\pm F$ 可测.

由此可得如下与微积分基本公式(3.3)有关的推论.

推论 3.39. 若 F 在 $[a,b]$ 上递增且连续, 则 F' 几乎处处存在. 进而, F' 是可测的, 非负的, 且有

$$\int_a^b F'(x)dx\leqslant F(b)-F(a).$$

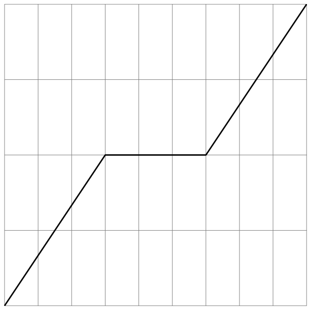
特别地, 若 F 在 $\mathbb{R}$ 上有界、递增且连续, 则 F' 在 $\mathbb{R}$ 上可积.

若我们只考虑连续递增函数, 则就只能得到上述推论中的“不等式”. 下面的例子说明了这一点.

通过简单的构造可以产生一个连续函数 $F:[0,1]\to[0,1]$, 它是递增的, $F(0)=0$, $F(1)=1$, 但 $F'(x)=0$, a.e.! 因此 F 是有界变差函数, 但

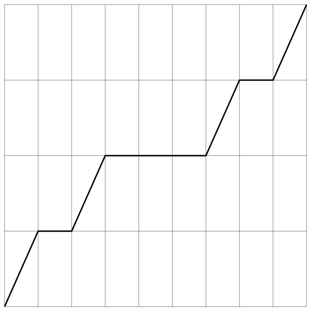
$$\int_a^b F'(x)dx\neq F(b)-F(a).$$

考虑标准 Cantor 三分集 $\mathcal{C}\subset[0,1]$, $\mathcal{C}=\bigcap\limits_{k=0}^{\infty}\mathcal{C}_k$, 其中 $\mathcal{C}_k$ 是 2^k 个闭区间的互不相交并. 比如, $\mathcal{C}_1=[0,1/3]\cup[2/3,1]$. 令 $F_1(x)$ 为 $[0,1]$ 上的连续递增函数, 满足



$$F_1(x)=\begin{cases}0, & x=0,\\ 1/2, & 1/3\leqslant x\leqslant 2/3,\\ 1, & x=1,\\ \text{线性}, & x\in\mathcal{C}_1.\end{cases}$$

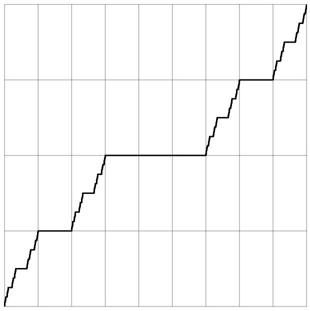
类似地, 令 $F_2(x)$ 为连续递增函数, 满足



$$F_2(x)=\begin{cases}0, & x=0,\\ 1/4, & x\in[1/9,2/9],\\ 1/2, & x\in[1/3,2/3],\\ 3/4, & x\in[7/9,8/9],\\ 1, & x=1,\\ \text{线性}, & x\in\mathcal{C}_2,\end{cases}$$

其中 $\mathcal{C}_2=[0,1/9]\cup[2/9,1/3]\cup[2/3,7/9]\cup[8/9,1]$.

继续这个过程得到一列连续递增函数 $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$, 满足



$$\sup_{x\in[0,1]}|F_{n+1}(x)-F_n(x)|\leqslant 2^{-n}.$$

因此, $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ 一致收敛到一个连续的极限函数 F, 称为Cantor-Lebesgue 函数. 由构造知, F 递增, $F(0)=0, F(1)=1$, 且在 Cantor 集的补集的每个区间上, F 为常数. 由于 $m(\mathcal{C})=0$, 故 $F'(x)=0$, a.e., 这正是我们想要的.

本节内容以及最后这个例子表明有界变差的假设保证了导数的几乎处处存在性, 但不能保证公式

$$\int_a^b F'(x)dx=F(b)-F(a)$$

的正确性. 在下一节, 我们将给出函数的合适条件, 使其完全地解决建立上述等式的问题.

§ 3.3.2 绝对连续函数

定义 3.40. 设 $F(x)$ 是 $[a,b]$ 上的实值函数, 若对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得当 $[a,b]$ 中任意有限个互不相交的开区间 (a_k, b_k), $(k = 1, \cdots, N)$ 满足 $\sum\limits_{k=1}^{N}(b_k - a_k) < \delta$ 时有

$$\sum_{k=1}^{N}|F(b_k) - F(a_k)| < \varepsilon,$$

则称 $F(x)$ 是 $[a,b]$ 上的绝对连续函数, 其全体构成一个线性空间, 记为AC$([a,b])$.

显然, 由定义知, 绝对连续 $\Longrightarrow$ 一致连续 $\Longrightarrow$ 连续.

命题 3.41. $\mathrm{AC}([a,b]) \subset \mathrm{BV}([a,b])$.

由命题 3.41及命题 3.33可得: 绝对连续函数的全变差是连续的 (实际上是绝对连续的, 见定理 3.43的证明).

命题 3.42. 若 $f \in L^1([a,b])$, 则其不定积分 $F(x) = \int_a^x f(t)dt \in \mathrm{AC}([a,b])$.

这个结论也说明 "绝对连续" 是希望证明 $\int_a^b F'(x)dx = F(b) - F(a)$ 对 F 所施加的一个必要条件.

定理 3.43. 若 $F \in \mathrm{AC}([a,b])$, 则 $F'(x)$ 几乎处处存在. 进而, 若 $F'(x) = 0$ a.e., 则 F 为常数.

为了证明后半段, 我们先引入 Vitali 覆盖的相关结果.

定义 3.44. 设 $E \subset \mathbb{R}^n$, $\mathcal{B}$ 是由球构成的一个集簇. 若对任意的 $x \in E$ 及 $\eta > 0$, 存在 $B \in \mathcal{B}$, 使得 $B \ni x$ 且 $m(B) < \eta$, 则称 $\mathcal{B}$ 是 E 在 Vitali 意义下的一个覆盖, 简称 E 的Vitali 覆盖. 因此, 每个点都被任意小测度的球覆盖.

例 3.45. 设 $E = [a,b]$, 令 $\{r_n\}$ 为 $[a,b]$ 中的全体有理数, 作

$$I_{n,m} = \left[r_n - \frac{1}{m}, r_n + \frac{1}{m}\right],$$

则区间簇 $\mathcal{B} = \{I_{n,m} : n, m \in \mathbb{N}\}$ 是 E 的 Vitali 覆盖.

引理 3.46 (Vitali 覆盖定理 II). 设 $E \subset \mathbb{R}^n$, $m(E) < \infty$. 若 $\mathcal{B}$ 是 E 的 Vitali 覆盖, 则对任意的 $\delta > 0$, 存在有限个几乎互不相交的球 $B_1, \cdots, B_N \in \mathcal{B}$, 使

得

$$\sum_{i=1}^{N} m(B_i) \geqslant m(E) - \delta.$$

推论 3.47. 在引理 3.46的条件下, 能够选取球, 使得

$$m\Big(E \setminus \bigcup_{i=1}^{N} B_i\Big) < 2\delta.$$

现在, 我们回到一维空间, 来证明定理 3.43.

我们前面的这些努力均是为下面的 Lebesgue 积分的微积分基本定理做准备. 特别地, 它解决了我们本章开始时提出的第二个问题: 建立微分与积分之间的对应关系.

定理 3.48 (Lebesgue 积分的微积分基本定理). 设 $F \in \mathrm{AC}([a,b])$, 则 F' 几乎处处存在且可积, 并且对所有 $a \leqslant x \leqslant b$,

$$F(x) - F(a) = \int_a^x F'(y)dy.$$

取 $x = b$, 即得 $F(b) - F(a) = \int_a^b F'(y)dy$.

反过来, 若 $f \in L^1([a,b])$, 则存在 $F \in \mathrm{AC}([a,b])$, 使得 $F'(x) = f(x)$ a.e., 实际上, 可取 $F(x) = \int_a^x f(y)dy$.

§ 3.3.3 跳跃函数的可微性

我们现在考虑不一定连续的单调函数, 研究结果表明: 允许去掉先前在定理 3.34的证明中所做的连续性假设.

与之前一样, 可以假定 F 递增且有界. 特别地, 这两个条件保证了极限

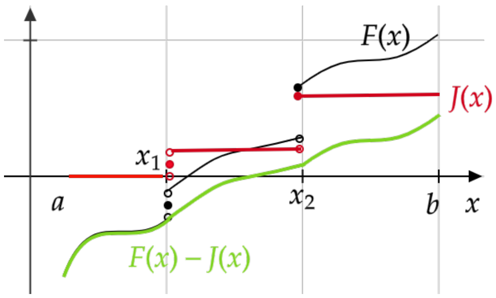
$$F(x^-) = \lim_{y \to x^-} F(y), \quad F(x^+) = \lim_{y \to x^+} F(y)$$

存在. 当然, $F(x^-) \leqslant F(x) \leqslant F(x^+)$, 且若 $F(x^-) = F(x^+)$, 则 $F(x)$ 在 x 处连续; 否则, 称它具有跳跃不连续性. 幸运的是, 我们可以证明它们至多有可列个, 故这种不连续性是可以处理的.

引理 3.49. $[a,b]$ 上的一个有界递增函数 F 至多有可列个不连续点.

定义 3.50. 令 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为 $[a,b]$ 上的有界递增函数 F 的不连续点集, F 在 x_n 处的右极限与左极限之差 $\alpha_n = F(x_n^+) - F(x_n^-)$ 称为 F 在点 x_n 处的跃度,

则
$$F(x_n^+) = F(x_n^-) + \alpha_n,$$
且对某个 $\theta_n \in [0,1]$, 有
$$F(x_n) = F(x_n^-) + \theta_n \alpha_n.$$
若令
$$j_n(x) = \begin{cases} 0, & x < x_n, \\ \theta_n, & x = x_n, \\ 1, & x > x_n, \end{cases}$$
则相应于 F 的跳跃函数定义为
$$J_F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n j_n(x).$$
为方便起见, 在无混淆情况下, 将 J_F 简记为 J.



我们观察到, 若 F 为 $[a,b]$ 上的有界递增函数, 则必有 $\alpha_n > 0$ 且
$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \leqslant F(b) - F(a) < \infty,$$
因此, 用来定义 J 的级数绝对且一致收敛.

引理 3.51. 若 F 在 $[a,b]$ 上有界递增, 则

(i) $J(x)$ 在 F 的不连续点集 $\{x_n\}$ 处不连续且在 x_n 处有与 F 相同的跃度.

(ii) 差 $F(x) - J(x)$ 递增且连续.

由于可写成 $F(x) = [F(x) - J(x)] + J(x)$, 故我们的目标转向证明 J 几乎处处可微.

定理 3.52. 若 J 是以上定义的跳跃函数, 则 $J'(x)$ 几乎处处存在且为 0.

注记 3.53. 能不能利用在每个区间 (x_{n-1}, x_n) 上为常数得到导数 a.e. 为零? 实际上, 这是不可以的, 因为可列集可以在 $[a, b]$ 上稠密, 如所有有理数构成的不连续点, 这些不连续点可能不能分解成区间的形式, 故不可以这样简单地证明之.

至此, 我们也就完全证明了定理 3.34.

§3.4 可求长曲线

我们对可求长曲线做进一步的讨论, 首先考虑关于参数化曲线 $(x(t), y(t))$ 的弧长公式

$$L = \int_a^b \left[(x'(t))^2 + (y'(t))^2\right]^{1/2} dt \tag{3.6}$$

的正确性.

我们已经知道可求长曲线是那些除了假设 $x(t), y(t)$ 连续, 还是有界变差函数的曲线. 然而, 一个简单例子表明公式(3.6)并不总是成立: 令 $x(t) = F(t), y(t) = F(t)$, 其中 F 是 Cantor-Lebesgue 函数且 $t \in [0, 1]$, 则该参数化曲线勾画出从 $(0, 0)$ 到 $(1, 1)$ 的直线, 其长度为 $\sqrt{2}$, 但 $x'(t) = y'(t) = 0$, a.e. t.

若我们额外假定参数化表示的坐标函数是绝对连续的, 则表示弧长 L 的积分公式实际上是成立的.

定理 3.54. 设 $(x(t), y(t))$ 是定义在 $a \leqslant t \leqslant b$ 上的曲线. 若 $x(t), y(t) \in \mathrm{AC}([a, b])$, 则曲线是可求长的, 且它的长度为

$$L = \int_a^b \left[(x'(t))^2 + (y'(t))^2\right]^{1/2} dt. \tag{3.6}$$

命题 3.55. 设 F 是复值的且 $F(t) \in \mathrm{AC}([a, b])$. 则

$$T_F(a, b) = \int_a^b |F'(t)| dt.$$

现在, 任何曲线 (可视为映射 $t \mapsto z(t)$ 的像) 实际上可以用许多不同的参数化实现. 然而, 一条可求长曲线, 有一个伴随它的唯一的自然参数化—弧长参数化. 事实上, 令 $L(A, B)$ 表示长度函数, 对 $t \in [a, b]$, 令 $s = s(t) = L(a, t)$, 则由命题 3.33知弧长 $s(t)$ 是一个将 $[a, b]$ 映到 $[0, L]$ 的连续递增函数, 其中 L 为曲线的长度. 曲线的弧长参数化就由

$$\tilde{z}(s) = \tilde{x}(s) + i\tilde{y}(s)$$

给出, 其中对于 $s = s(t)$, 有 $\tilde{z}(s) = z(t)$. 注意, 依这种方式, 函数 $\tilde{z}(s)$ 在 $[0, L]$

的定义是合理的, 因为若 $s(t_1)=s(t_2), t_1<t_2$, 则 $z(t)$ 在区间 $[t_1,t_2]$ 上没变化, 故 $z(t_1)=z(t_2)$. 此外, 对所有 $s_1,s_2\in[0,L]$, $|\tilde{z}(s_1)-\tilde{z}(s_2)|\leqslant|s_1-s_2|$, 这是因为不等式左边是曲线上两点间的距离, 右边是连接这两点的曲线部分的长度. 当 t 从 a 变到 b 时, s 从 0 变到 L, $\tilde{z}(s)$ 与 $z(t)$(以同样的顺序) 勾画出相同的点.

定理 3.56. 设 $(x(t),y(t)), a\leqslant t\leqslant b$ 是长度为 L 的可求长曲线. 考虑以上描述的弧长参数化 $\tilde{z}(s)=(\tilde{x}(s),\tilde{y}(s))$. 则 $\tilde{x},\tilde{y}$ 是绝对连续的, $|\tilde{z}'(s)|=1$ a.e. $s\in[0,L]$ 且

$$L=\int_0^L\left[(\tilde{x}'(s))^2+(\tilde{y}'(s))^2\right]^{1/2}ds.$$

从上面的证明中, 我们得出了一个简单的结论.

命题 3.57. 若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上满足Lipschitz 条件:

$$|f(x)-f(y)|\leqslant M|x-y|,\quad x,y\in[a,b],$$

其中 $M>0$ 为常数, 则 $f\in\mathrm{AC}([a,b])$. (记 $[a,b]$ 上满足 Lipschitz 条件的函数族为$\mathrm{Lip}([a,b])$, 即 $\mathrm{Lip}([a,b])\subset\mathrm{AC}([a,b])$.)

小结