第四章 抽象测度与积分论

在大部分分析数学中, 积分起着重要的角色. 当处理出现在各种不同空间上的分析中的问题时, 积分会以一种或另一种形式被使用. 尽管在某些情况下只需要在这些空间上对连续函数或简单函数积分, 但是对其他很多问题的深入研究需要基于更为精细的测度论思想的积分, 本章的目标就是发展这些思想, 这超越了 Euclid 空间 $\mathbb{R}^n$ 的情形.

出发点是 Carathéodory 卓有成效的洞察力和在非常一般的背景下架构测度的定理的相应引导. 一旦实现, 在一般框架下积分的基本结果的演绎就可以用熟知的结果得到.

§4.1 抽象测度空间

定义 4.1. 若集合 X 配备一个由 X 的子集构成的 σ 代数 $\mathcal{M}$, 则称 $(X,\mathcal{M})$ 为可测空间(measurable/measuring space), 若 X 的子集 $E \in \mathcal{M}$, 则称 E(关于 $\mathcal{M}$)可测.

$(X,\mathcal{M})$(或 $\mathcal{M}, X$) 上的测度是一个函数 $\mu: \mathcal{M} \to [0,\infty]$ 满足下面的性质:

(i) $\mu(\varnothing)=0$,

(ii) 若 $E_1, E_2, \cdots$ 是 $\mathcal{M}$ 中可列个互不相交的集合, 则

$$\mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\right)=\sum_{j=1}^{\infty}\mu(E_j).$$

$(X,\mathcal{M},\mu)$ 称为测度空间(measure space). 但有时候, 在不引起歧义时可简记为 (X,μ) 或 X.

性质 (ii) 称为可列可加性. 它蕴含着有限可加性:

(ii′) 若 $E_1,\cdots,E_n$ 是 $\mathcal{M}$ 中互不相交集, 则 $\mu\left(\bigcup\limits_{j=1}^{n} E_j\right)=\sum\limits_{j=1}^{n}\mu(E_j)$.

实际上, 当 $j>n$ 时取 $E_j=\varnothing$ 即得. 若函数 μ 满足 (i) 和 (ii′) 但不一定满足 (ii), 则称之为有限可加测度.

定义 4.2. 设 $(X,\mathcal{M},\mu)$ 为测度空间, 若 $\mu(X)<\infty$, 则 μ 称为有限的. 若 $X=\bigcup\limits_{j=1}^{\infty} E_j$, 其中对任意 j, $E_j \in \mathcal{M}$ 且 $\mu(E_j)<\infty$, 则称 μ 是σ-有限的. 更一般的, 若 $E=\bigcup\limits_{j=1}^{\infty} E_j$, 其中对任意 j, $E_j\in\mathcal{M}$ 且 $\mu(E_j)<\infty$, 则称 E 关于 μ 是 σ-有限的. 若对每个 $E\in\mathcal{M}$ 且满足 $\mu(E)=\infty$, 存在 $F\in\mathcal{M}$, 使得 $F\subset E$ 且 $0<\mu(F)<\infty$, 则称 μ 是半有限的. (cf. [Fol13, p.25])

在实践中提出的绝大多数测度是 σ 有限的. 考虑到 σ 有限的准则, 由有限可测集组成的可列覆盖可取为互不相交的. 事实上, 若 $\{X_k\}_{k=1}^{\infty}$ 是这样一个覆盖, 对 $k\geqslant 2$, 用 $X_k\setminus\bigcup\limits_{j=1}^{k-1}X_j$ 代替每个 X_k 就得到了由有限可测集组成的互不相交覆盖.

先来看两个简单的例子.

(i) $X=\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\mathcal{M}=\mathscr{P}(X)$ 即为 X 的所有子集组成的族, 测度 $\mu(x_n)=\mu_n$, 其中 $\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是一个给定的广义非负数列. 注意到 $\mu(E)=\sum\limits_{x_n\in E}\mu_n$. 若 $\forall n$, $\mu_n=1$, 则称 μ 为计数测度, 并用 # 表示. 在这种情况下, μ 显然是 σ 有限的.

(ii) $X=\mathbb{R}^n$, $\mathcal{M}$ 为 Lebesgue 可测集组成的族, 且 $\mu(E)=\int_E f dx$, 其中 f

是一个给定的 $\mathbb{R}^n$ 上的非负可测函数. $f=1$ 的情形对应于 Lebesgue 测度. μ 的可列可加性由 Lebesgue 积分的可加性和第2章中证明过的非负函数的积分的极限性质得到.

如 Lebesgue 测度一样, 一般测度也具有单调性、可列单调性、上连续性和下连续性等基本性质, 总结如下.

命题 4.3. 设 $(X,\mathcal{M},\mu)$ 为测度空间. 有如下性质:

(i) (有限可加性) 对于任何有限不交的可测集族 $\{E_k\}_{j=1}^n$,

$$\mu\left(\bigcup_{j=1}^n E_j\right)=\sum_{j=1}^n \mu(E_j).$$

(ii) (单调性) 若 $A,B\in\mathcal{M}$ 且 $A\subset B$, 则

$$\mu(A)\leqslant\mu(B).$$

(iii) (分割性) 若 $A,B\in\mathcal{M}$, $A\subset B$ 且 $\mu(A)<\infty$, 则

$$\mu(B\setminus A)=\mu(B)-\mu(A),$$

特别地, 若 $\mu(A)=0$, 则 $\mu(B\setminus A)=\mu(B)$.

(iv) (可列单调性) 对任何覆盖可测集 E 的可测集族 $\{E_k\}_{k=1}^\infty$,

$$\mu(E)\leqslant\sum_{k=1}^\infty \mu(E_k).$$

(v) (下连续性) 若 $\{A_k\}_{k=1}^\infty$ 是递增可测集列, 则

$$\mu(\bigcup_{k=1}^\infty A_k)=\lim_{k\to\infty}\mu(A_k).$$

(vi) (上连续性) 若 $\{B_k\}_{k=1}^\infty$ 是递减可测集列, 且 $\mu(B_1)<\infty$, 则

$$\mu(\bigcap_{k=1}^\infty B_k)=\lim_{k\to\infty}\mu(B_k).$$

(vii) (Borel-Cantelli 引理) 若 $\{E_k\}_{k=1}^\infty$ 是满足 $\sum\limits_{k=1}^\infty \mu(E_k)<\infty$ 的可列可测集族, 则 X 中的几乎所有 x 属于至多有限个 E_k.

每个 σ-有限测度是半有限的(cf. [Fol13, Ex.1.13]), 但反之不然.

与大多数应用相关的测度空间的构造需要更深入的思想, 我们现在就来阐述它们.

§4.1.1 外测度与 Carathéodory 定理

同第1章中 Lebesgue 测度一样, 要构造一般情形下的测度及相应的可测集, 我们需要外测度的概念.

定义 4.4. 设 X 为一集合, X 上的外测度 μ_* 是一个从 $\mathscr{P}(X)$ 到 $[0,\infty]$ 的函数, 满足

(i) $\mu_*(\varnothing)=0$,

(ii) 若 $E_1\subset E_2$, 则 $\mu_*(E_1)\leqslant\mu_*(E_2)$,

(iii) 若 $E_1,E_2,\cdots$ 是一个可列集族, 则

$$\mu_*\left(\bigcup_{j=1}^{\infty}E_j\right)\leqslant\sum_{j=1}^{\infty}\mu_*(E_j).$$

第1章中定义的 $\mathbb{R}^n$ 上的 Lebesgue 外测度 m_* 具有所有这些性质. 实际上, 一大类外测度可以利用一族测度已知的特殊集合来“覆盖”而得到. 这个思想可由之后引进的“准测度”的概念来系统化.

给定一个外测度 μ_*, 我们面临的问题是如何定义相应的可测集的概念. 在 $\mathbb{R}^n$ 中 Lebesgue 测度的情形, 可测集是通过用外测度来刻画与开集 (或闭集) 的不同来定义的. 对一般情形, Carathéodory[1]发现了一个巧妙的替代条件, 定义如下.

定义 4.5. X 中的集合 E 称为Carathéodory 可测的或简单地说可测的, 若

$$\mu_*(A)=\mu_*(E\cap A)+\mu_*(E^c\cap A),\quad \forall A\subset X. \tag{4.1}$$

换言之, E 将任何集 A 分成关于外测度 μ_* 表现良好的两个部分. 为此, (4.1)有时被称为可分离条件. 可以证明在 $\mathbb{R}^n$ 中取 Lebesgue 外测度的(4.1)式所定义的可测性概念与第1章中给出的 Lebesgue 可测性的定义等价.(cf. [SS05, Ex. 6.3])

要证一个集合 E 是可测的, 只需验证

$$\mu_*(A)\geqslant\mu_*(E\cap A)+\mu_*(E^c\cap A),\quad \forall A\subset X,\ \mu_*(A)<\infty.$$

关于由(4.1)定义的可测集, 有如下定理.

[1]Constantin Carathéodory(康斯坦丁・卡拉泰奥多里, 1873-1950) 生于柏林, 是 20 世纪最具影响力的数学家之一, 一位被 Einstein 尊称为老师的希腊裔数学家. 对变分法、复分析、实变函数论、测度论等数学理论作出重要贡献；在物理学公理化问题上更是有杰出工作. 他对测度论进行了公理化研究, 提出了 Lebesgue 可测集判定准则及测度的延拓定理, 并将其推广到 Boole 代数 (又称逻辑代数), 成为抽象测度论的有力工具和现代测度论的基础.

定理 4.6 (Carathéodory 定理)**.** 给定一个集合 X 上的外测度 μ_*, 由 Carathéodory 可测集组成的集簇 $\mathcal{M}$ 形成一个 σ 代数. 此外, μ_* 限制在 $\mathcal{M}$ 上是一个测度.

因零外测集是 Carathéodory 可测的, 故上述定理中的测度空间 $(X, \mathcal{M}, \mu)$ 是完备的: 只要 $F \in \mathcal{M}$ 满足 $\mu(F) = 0$ 且 $E \subset F$, 就有 $E \in \mathcal{M}$.

§4.1.2 度量外测度

若 X 被赋予度量, 则有一类在实践中有趣的外测度, 这些外测度的重要性在于它们在由 X 中开集生成的自然 σ 代数上诱导出测度. 度量空间 (X, d) 自然具备一个开球族:

$$B_r(x) = \{y \in X : d(x, y) < r\}$$

定义了中心在 x, 半径为 r 的开球. 与第1章中类似, 将 $\mathbb{R}^n$ 换成 X, 称集合 $\mathcal{O} \subset X$ 是开的, 若对任意的 $x \in \mathcal{O}$, 存在 $r > 0$ 使得开球 $B_r(x) \subset \mathcal{O}$. 若一个集合的补集是开的, 则称其为闭的. 有了这些定义, 易验证开集的任意并是开集, 闭集的任意交是闭集.

最后, 如 §1.2中一样, 在度量空间 X 上, 我们能定义 Borel σ 代数, $\mathcal{B}_X$, 即包含 X 中所有开集的最小 σ 代数. 换言之, $\mathcal{B}_X$ 为所有包含 X 中开集的 σ 代数的交集. $\mathcal{B}_X$ 中的元素称为Borel 集.

现在来看 X 上满足可良好分离的集合上具有可加性的那些外测度. 我们将证明这一性质保证了该外测度在 Borel σ 代数上定义一个测度. 这可以通过证明所有的 Borel 集是 Carathéodory 可测的来实现.

定义 4.7. 给定度量空间 (X, d) 中的两个集合 A 和 B, 若 X 上的外测度 μ_* 满足: 只要 A 和 B 的距离 $d(A, B) > 0$, 就有

$$\mu_*(A \cup B) = \mu_*(A) + \mu_*(B),$$

则称 μ_* 是一个度量外测度.

这个性质在 Lebesgue 外测度的情形起着重要的角色.

定理 4.8. 若 μ_* 是度量空间 X 上的一个度量外测度, 则 X 中的 Borel 集是可测的. 因此, μ_* 限制在 $\mathcal{B}_X$ 上是一个测度.

给定度量空间 X, 定义在 X 的 Borel 集上的测度 μ 称为Borel 测度. 对所有半径有限的球赋予有限测度的 Borel 测度满足一个有用的正则性质. 对任何球 B 需 $\mu(B) < \infty$ 的要求在实践中出现的很多情况下是满足的 (但并非全部, 这

个限制对 Hausdorff 测度不总是成立). 当它成立时, 我们有如下命题.

命题 4.9 (正则性定理). 设 μ 是在度量空间 X 中所有半径有限的球上取有限值的 Borel 测度. 则对任何 Borel 集 E 和任给的 $\varepsilon > 0$, 存在开集 $\mathcal{O}$ 和闭集 F 使得 $E \subset \mathcal{O}$ 且 $\mu(\mathcal{O} \setminus E) < \varepsilon$, 而 $F \subset E$ 且 $\mu(E \setminus F) < \varepsilon$.

§4.1.3 延拓定理

我们已看到, 一旦有了外测度, 就可以构造 X 上的可测集. 然而, 外测度的定义通常依赖于定义在更简单的一类集上的测度, 就是下面要定义的准测度. 我们的目标是证明: 任何准测度均能被延拓成 X 上的一个测度.

定义 4.10. 令 X 为一集合, $\mathcal{A}$ 为 X 中一个代数. $\mathcal{A}$ 上的准测度是一个函数 $\mu_0 : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ 满足

(i) $\mu_0(\varnothing) = 0$;

(ii) 若 $E_1, E_2, \cdots$ 是 $\mathcal{A}$ 中互不相交集的可列簇且 $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} E_k \in \mathcal{A}$, 则

$$\mu_0\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_0\left(E_k\right).$$

特别地, μ_0 在 $\mathcal{A}$ 上是有限可加的.

准测度自然地给出一个外测度.

引理 4.11. 若 μ_0 是代数 $\mathcal{A}$ 上的一个准测度, 对任何 $E \subset X$ 上定义 μ_* 如下:

$$\mu_*(E) = \inf\left\{\sum_{j=1}^{\infty} \mu_0(E_j) : E \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j, E_j \in \mathcal{A}, \forall j\right\}.$$

则 μ_* 是 X 上的一个外测度, 满足

(i) $\mu_*(E) = \mu_0(E), \forall E \in \mathcal{A}$;

(ii) $\mathcal{A}$ 中所有集合在(4.1)的意义下是 (Carathéodory) 可测的.

据定义, 由代数 $\mathcal{A}$ 所生成的 σ 代数是包含 $\mathcal{A}$ 的最小 σ 代数. 上述引理提供了将 $\mathcal{A}$ 上的准测度 μ_0 延拓到由 $\mathcal{A}$ 生成的 σ 代数上测度的必要一步.

定理 4.12 (Carathéodory-Hahn 延拓定理). 设 $\mathcal{A}$ 是 X 中一个代数, μ_0 为 $\mathcal{A}$ 上一准测度, $\mathcal{M}$ 为由 $\mathcal{A}$ 生成的 σ 代数, 则存在 $\mathcal{M}$ 上的测度 μ 为 μ_0 的延拓. 此外, 若 μ_0 是 σ-有限的, 则 μ 也是 σ-有限的, 且 μ 是 μ_0 在 $\mathcal{M}$ 上延拓的唯一测度.

为了后面的应用, 下面将关于代数 $\mathcal{A}$ 上的准测度 μ_0 和隐含在上面给出的

论证中的测度 μ_* 的观察单列出来.

定义 $\mathcal{A}_\sigma$ 为 $\mathcal{A}$ 中集合的可列并组成的集簇, $\mathcal{A}_{\sigma\delta}$ 是由 $\mathcal{A}_\sigma$ 中的集合的可列交组成的集簇.

命题 4.13. 对任何集 E 和任何 $\varepsilon > 0$, 存在 $E_1 \in \mathcal{A}_\sigma$ 和 $E_2 \in \mathcal{A}_{\sigma\delta}$, 使得 $E \subset E_1, E \subset E_2$, 且 $\mu_*(E_1) \leqslant \mu_*(E) + \varepsilon$, 而 $\mu_*(E_2) = \mu_*(E)$.

§ 4.2 测度空间上的积分

一旦建立了测度空间 X 的基本性质, 就可以像 $\mathbb{R}^n$ 上的 Lebesgue 测度那样, 推导出可测函数及其在 X 上的积分的基本性质. 实际上, §1.3和所有第2章中的结果都可以推广到一般情形, 而证明几乎逐字相同. 因此, 我们就不再重复这些论证, 而是直接表述重点. 大家自己补全缺失的细节应该没有困难.

为避免不必要的繁杂, 我们将总是假设所考虑的测度空间 $(X, \mathcal{M}, \mu)$ 是 σ-有限的.

§ 4.2.1 可测函数

定义 4.14. 函数 $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ 称为可测函数, 若

$$f^{-1}([-\infty, a)) = \{x \in X : f(x) < a\} \in \mathcal{M}, \quad \forall a \in \mathbb{R}.$$

有了这个定义, $\mathbb{R}^n$ 上 Lebesgue 测度情形下对应的可测函数的基本性质(cf. §1.3可测函数的性质 1.9–1.12)仍然成立. 例如, 可测函数组成的集合在基本的代数运算下是封闭的, 以及关于逐点极限也是封闭的.

我们现在使用的 “几乎处处” 的概念是关于测度 μ 的. 例如, 若 f 和 g 是 X 上的可测函数, 我们记 $f = g$ a.e., 就是说

$$\mu(\{x \in X : f(x) \neq g(x)\}) = 0.$$

X 上的简单函数形如:

$$\sum_{k=1}^{N} a_k \chi_{E_k},$$

其中 E_k 是测度有限的可测集, 而 a_k 为实数. 用简单函数逼近可测函数在 Lebesgue 积分的定义中起着重要的角色. 幸运的是, 这个结果在抽象框架下依然成立.

命题 4.15. 设 f 是 (σ-有限) 测度空间 $(X, \mathcal{M}, \mu)$ 上的非负可测函数, 则存在简单函数列 $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ 满足

$$\varphi_k(x) \leqslant \varphi_{k+1}(x) \text{ 且 } \lim_{k\to\infty} \varphi_k(x) = f(x), \quad \forall x.$$

一般地, 若 f 仅仅是可测的, 则存在简单函数列 $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ 满足

$$|\varphi_k(x)| \leqslant |\varphi_{k+1}(x)| \text{ 且 } \lim_{k\to\infty} \varphi_k(x) = f(x), \quad \forall x.$$

该结果的证明可通过对定理 1.28和定理 1.29的证明做一些明显的细微修改就可以得到, 其中我们要利用施加在 X 上的 σ-有限性这一技术性条件. 事实上, 若记 $X = \bigcup F_k$, 其中 $F_k \in \mathcal{M}$ 是测度有限的, 则集合 F_k 扮演定理 1.28证明中立方体 Q_k 的角色.

另一个可立即推广的重要结果是 Egorov 定理 (定理 1.33).

命题 4.16. 设 $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ 是定义在可测集 $E \subset X$ 上的可测函数列, 其中 $\mu(E) < \infty$, 且 $f_k \xrightarrow{\text{a.e.}} f$, 则 $\forall \varepsilon > 0, \exists A_\varepsilon \subset E, \mu(E \setminus A_\varepsilon) \leqslant \varepsilon$, s.t. f_k 在 A_ε 上一致收敛于 f.

§ 4.2.2 积分的定义和主要性质

第2章中给出的由简单函数的积分定义开始的构造 Lebesgue 积分的四步法也适用于定义 σ-有限测度空间 $(X, \mathcal{M}, \mu)$ 上的可测函数的积分. 由此得到了 X 上的非负可测函数 f 关于测度 μ 的积分的概念. 这个积分表示为

$$\int_X f(x) d\mu(x),$$

在没有歧义时, 也简写为 $\int_X f d\mu$, $\int f d\mu$ 或 $\int f$. 最后, 若

$$\int_X |f(x)| d\mu(x) < \infty,$$

则称可测函数 f 是可积的.

积分的基本性质, 如线性性和单调性, 还有下面的基本收敛定理, 在一般情形下仍成立.

命题 4.17. (i) (Fatou 引理) 若 $\{f_n\}$ 是 X 上的非负可测函数列, 则

$$\int \liminf_{n\to\infty} f_n d\mu \leqslant \liminf_{n\to\infty} \int f_n d\mu.$$

(ii) (单调收敛定理) 若 $\{f_n\}$ 是 X 上的非负可测函数列, 且 $f_n \nearrow f$, 则

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu = \int f d\mu.$$

(iii) (控制收敛定理) 若 $\{f_n\}$ 是 X 上的可测函数列, $f_n \xrightarrow{\text{a.e.}} f$, 且存在某个可积函数 g 使得 $|f_n| \leqslant g$, 则

$$\int |f_n - f| d\mu \to 0, \quad n \to \infty.$$

因此,

$$\int f_n d\mu \to \int f d\mu, \quad n \to \infty.$$

$(X, \mathcal{M}, \mu)$ 上的可积函数形成的等价类 (模掉几乎处处为零的函数) 构成一个赋范线性空间. 这个空间记为 $L^1(X, \mu)$, 其范数为

$$\|f\|_{L^1(X,\mu)} = \int_X |f(x)| d\mu(x). \tag{4.2}$$

命题 2.23和定理 2.24的证明均可推广到一般情形并可得到:

命题 4.18. $L^1(X, \mu)$ 是完备的赋范线性空间.

§4.3 例子

现在讨论一般理论的几个有用的例子. 第一个例子是关于乘积测度的构造, 并导出将重积分表示为累次积分的 Fubini 定理的一般形式, 这推广了 §2.3考虑的 Euclid 空间的情形.

§4.3.1 乘积测度与一般的 Fubini 定理

设 $(X_1, \mathcal{M}_1, \mu_1)$ 和 $(X_2, \mathcal{M}_2, \mu_2)$ 是一对测度空间, 我们来描述乘积空间 $X = X_1 \times X_2 = \{(x_1, x_2) : x_1 \in X_1, x_2 \in X_2\}$ 上的乘积测度 $\mu_1 \times \mu_2$. 这里假设两个测度空间均为完备的和 σ-有限的.

我们先定义可测长方体为形如 $A \times B$ 的集合, 其中 $A \in \mathcal{M}_1, B \in \mathcal{M}_2$. 用 $\mathcal{A}$ 表示 X 中所有互不相交可测长方体的有限并构成的集簇. 易证 $\mathcal{A}$ 是 X 中子集的一个代数.

为了简化术语, 从现在起将 “可测长方体” 简称为 “长方体”.

设长方体 $A \times B$ 为互不相交长方体 $\{A_j \times B_j\}$ 的可列并, 即 $A \times B = \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} (A_j \times B_j)$, 则对 $x_1 \in X_1, x_2 \in X_2$,

$$\begin{aligned}\chi_A(x_1)\chi_B(x_2) =& \chi_{A\times B}(x_1, x_2) \\ &= \sum \chi_{A_j \times B_j}(x_1, x_2) = \sum \chi_{A_j}(x_1)\chi_{B_j}(x_2).\end{aligned}$$

若我们关于 x_1 积分并利用单调收敛定理 (或逐项积分定理), 即得

$$\begin{aligned}\mu_1(A)\chi_B(x_2) &= \int \chi_A(x_1)\chi_B(x_2)d\mu_1(x_1)\\ &= \sum\int \chi_{A_j}(x_1)\chi_{B_j}(x_2)d\mu_1(x_1)\\ &= \sum \mu_1(A_j)\chi_{B_j}(x_2).\end{aligned}$$

然后, 同样关于 x_2 积分, 可得

$$\mu_1(A)\mu_2(B) = \sum \mu_1(A_j)\mu_2(B_j).$$

因此, 定义

$$\mu_0(A\times B) = \mu_1(A)\mu_2(B),$$

(使用通用约定 $0\cdot\infty = 0$), 从而有

$$\mu_0(A\times B) = \sum_{j=1}^{\infty}\mu_0(A_j\times B_j). \tag{4.3}$$

故 μ_0 在 $\mathcal{A}$ 上是良定的, 且是 $\mathcal{A}$ 上的一个准测度. 由 Carathéodory-Hahn 延拓定理, 在由 $\mathcal{A}$ 生成的 σ 代数上可延拓成一个测度, 记为 $\mu=\mu_1\times\mu_2$. 用这样的方式, 就定义了乘积测度空间 $(X_1\times X_2,\mathcal{M},\mu_1\times\mu_2)$.

给定 $E\in\mathcal{M}$, 考虑截面

$$E_{x_1} = \{x_2\in X_2 : (x_1,x_2)\in E\},\quad E^{x_2} = \{x_1\in X_1 : (x_1,x_2)\in E\}.$$

我们有下面的重要结论.

命题 4.19. 若 $E\in\mathcal{A}_{\sigma\delta}$, 则对几乎每个 x_2, E^{x_2} 是 μ_1-可测的. 进而, $\mu_1(E^{x_2})$ 是一个 μ_2-可测函数. 此外,

$$\int_{X_2}\mu_1(E^{x_2})d\mu_2 = (\mu_1\times\mu_2)(E). \tag{4.4}$$

现将上述命题的结果推广到一般的可测集 $E\subset X_1\times X_2$, 即 $E\in\mathcal{M}$, $\mathcal{M}$ 是由可测长方体生成的 σ-代数.

命题 4.20. 设 E 为 X 中任意可测集, 则除了仅能断言对几乎每个 $x_2\in X_2$, E^{x_2} 是 μ_1-可测的和 $\mu_1(E^{x_2})$ 有定义外, 命题 4.19的结论仍成立.

我们现在可以得到下面的主要结果, 它推广了 Fubini 定理 (定理 2.29).

定理 4.21 (Fubini 定理: 一般情形). 在上面的框架下, 设 $f(x_1,x_2)$ 是 $(X_1\times X_2,\mu_1\times\mu_2)$ 上的可积函数，则

(i) 对几乎每个 $x_2\in X_2$, 截口 $f^{x_2}(x_1)=f(x_1,x_2)$ 在 (X_1,μ_1) 上可积.

(ii) $\int_{X_1} f(x_1,x_2)d\mu_1$ 是 X_2 上的可积函数.

(iii) $\int_{X_2}\left(\int_{X_1} f(x_1,x_2)d\mu_1\right)d\mu_2=\int_{X_1\times X_2} fd(\mu_1\times\mu_2)$.

注记 4.22. 即使 μ_1 和 μ_2 均是完备的, 上面构造的乘积测度 $\mu_1\times\mu_2$ 几乎也是不完备的. 当然, 我们可以考虑 $\mu_1\times\mu_2$ 的完备化, 但这样的话, $X_1\times X_2$ 上函数的可测性与截面的可测性就没这么简单了. 然而, 若像 [SS05, Ex. 6.2] 那样定义完备化的空间 $(X,\overline{\mathcal{M}},\bar{\mu})$, 就是把 $\mathcal{M}$ 中零测集的子集全拿进来, $\overline{\mathcal{M}}=\{E\cup Z: E\in\mathcal{M}, Z\subset F, F\in\mathcal{M}, \mu(F)=0\}$, $\bar{\mu}(E\cup Z)=\mu(E)$, 则 $\bar{\mu}$ 是 $\overline{\mathcal{M}}$ 上的完备测度, 在这个完备化空间中定理仍成立(cf. [Fol13, Theorem 2.39]), 证明只需对命题 4.20中的论证稍作修改即可.

§4.3.2 极坐标积分公式

点 $x\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$ 的极坐标是 (r,γ), 其中 $r=|x|\in(0,\infty)$, $\gamma=\frac{x}{|x|}\in\mathbb{S}^{n-1}=\{x\in\mathbb{R}^n: |x|=1\}$, 相反地, $x=r\gamma$.

我们想在合适的定义和恰当的假设下建立如下公式:

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx=\int_{\mathbb{S}^{n-1}}\left(\int_0^\infty f(r\gamma)r^{n-1}dr\right)d\sigma(\gamma). \tag{4.5}$$

为此, 我们考察下面的一对测度空间. 首先, $(X_1,\mathcal{M}_1,\mu_1)$, 其中 $X_1=(0,\infty)$, $\mathcal{M}_1$ 是 $(0,\infty)$ 上 Lebesgue 可测集组成的集簇, 且在 $\mu_1(E)=\int_E r^{n-1}dr$ 的意义下 $d\mu_1=r^{n-1}dr$. $X_2=\mathbb{S}^{n-1}$, 测度 $\mu_2=\sigma$ 由(4.5)确定. 事实上, 给定任意集合 $E\subset\mathbb{S}^{n-1}$, 令

$$\tilde{E}=\{x\in\mathbb{R}^n: \frac{x}{|x|}\in E, 0<|x|<1\}$$

为 "端点" 在 E 上的单位球的 "扇形" 部分. 当 $\tilde{E}$ 在 $\mathbb{R}^n$ 中 Lebesgue 可测时, 称 $E\in\mathcal{M}_2$, 且定义

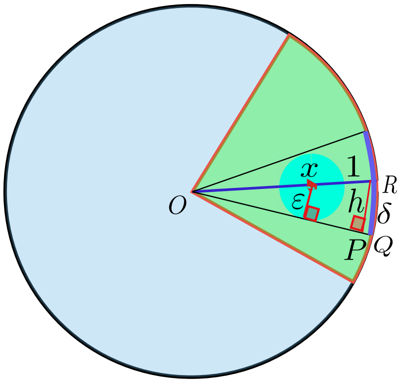
$$\mu_2(E)=\sigma(E)=n\cdot m(\tilde{E}),$$

其中 m 是 $\mathbb{R}^n$ 上的 Lebesgue 测度.

显然, $(X_1,\mathcal{M}_1,\mu_1)$ 和 $(X_2,\mathcal{M}_2,\mu_2)$ 均满足完备 σ-有限测度空间的所有性质. 此外, $\mathbb{S}^{n-1}$ 上有一个度量:

$$d(\gamma,\gamma')=|\gamma-\gamma'|,\quad \forall\gamma,\gamma'\in\mathbb{S}^{n-1}.$$

若 E 是 $\mathbb{S}^{n-1}$ 中的一个开集 (关于该度量), 则 $\tilde{E}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的开集. 实际上, $\forall x\in\tilde{E}$, 即 $\frac{x}{|x|}\in E$ 且 $0<|x|<1$, 因 E 开, 故存在 $\delta\in(0,1-|x|)$, 使得当 $\left|\frac{x}{|x|}-\frac{y}{|y|}\right|<\delta$ 时, 均有 $\frac{y}{|y|}\in E$. 取 $0<\varepsilon<\frac{\delta}{2}\sqrt{4-\delta^2}|x|$, 则 $B_\varepsilon(x)\subset\tilde{E}$, 从而 $\tilde{E}$ 为开集, 故可测. 因此, $E\in\mathcal{M}_2$.



$$\begin{aligned}\delta^2-h^2 =&|PQ|^2=(1-|OP|)^2\\ =&(1-\sqrt{1-h^2})^2,\end{aligned}$$

从而,

$$\varepsilon<\varepsilon_{\max}=h|x|=\frac{\delta}{2}\sqrt{4-\delta^2}|x|.$$

定理 4.23. 设 $f\in L^1(\mathbb{R}^n)$, 则对几乎每个 $\gamma\in\mathbb{S}^{n-1}$, 由 $f^\gamma(r)=f(r\gamma)$ 定义的截口 f^γ 关于测度 $r^{n-1}dr$ 可积. 此外, $\int_0^\infty f^\gamma(r)r^{n-1}dr$ 在 $\mathbb{S}^{n-1}$ 上可积且(4.5)成立. (注: 交换 r 和 γ 的积分次序也有相应的结果.)

§ 4.3.3 $\mathbb{R}$ 上的 Borel 测度与 Lebesgue-Stieltjes 积分

Stieltjes[2]积分是 Riemann 积分 $\int_a^b f(x)dx$ 的一种推广, 其中增量 dx 用给定的 $[a,b]$ 上的递增函数 F 的增量 $dF(x)$ 代替. 我们用本章所采用的一般观点来探讨这个思想. 接下来的问题就是如何用这种方式刻画 $\mathbb{R}$ 上的测度, 特别是定义在实直线上 Borel 集上的测度.

为了使测度与递增函数之间有唯一的对应关系, 我们首先需要适当地规范化这些函数. 由引理 3.49知 $[a,b]$ 上一个有界递增函数 F 至多有可列个不连续点. 若 x_0 是一个不连续点, 则左右极限

$$\lim_{x\to x_0^-}F(x)=F(x_0^-)\quad 和\quad \lim_{x\to x_0^+}F(x)=F(x_0^+)$$

均存在, 但 $F(x_0^-)<F(x_0^+)$, $F(x_0)$ 为介于 $F(x_0^-)$ 与 $F(x_0^+)$ 之间的某个值. 现在修正 F 在 x_0 的值, 若必要, 可令 $F(x_0)=F(x_0^+)$, 并对每个不连续点都这样做. 由此得到的函数 F 仍是递增的, 而且在每个点都是右连续的, 我们称这样的函数是规范化的. 主要结果如下:

定理 4.24. 设 F 是一个定义在 $\mathbb{R}$ 上的递增规范化函数, 则存在 $\mathbb{R}$ 中 Borel 集簇 $\mathcal{B}$ 上的唯一测度 μ(也记为 dF), 使得若 $a<b$, 则 $\mu((a,b])=F(b)-F(a)$.

[2] Thomas Joannes Stieltjes (发音 /'sti:ltʃəs/, 斯蒂尔切斯), 1856-1894, 荷兰数学家.

反之, 若 μ 是 $\mathcal{B}$ 上的一个在有界区间上有限的测度, 定义

$$F(x)=\begin{cases}\mu((0,x]), & 若 x>0,\\ 0, & 若 x=0,\\ -\mu((x,0]) & 若 x<0,\end{cases}$$

则 F 递增且是规范化的.

注记 4.25. 下面给出几个注记.

(i) 条件 "μ 在有界区间上是有限的" 是至关重要的. 事实上, [SS05, Ch.7] 中讨论的 Hausdorff 测度给出了不同于本定理中的 $\mathbb{R}$ 上 Borel 测度的例子.

(ii) 这个定理也可以使用 $[a,b)$ 形式的区间和左连续函数 F 给出相应的结论.

(iii) 若两个递增函数 F 和 G 只相差一个常数, 则它们给出的测度相同. 反过来也对, 因对所有 $a<b$, $F(b)-F(a)=G(b)-G(a)$ 均成立, 则 $F-G$ 为常数.

(iv) 由延拓定理构造的测度 μ 可以定义在一个比 Borel 集更大的 σ 代数上, 并且是完备的. 然而, 在应用中, 它限制在 Borel 集上经常就够了.

(v) 若 F 是定义在闭区间 $[a,b]$ 上的递增规范化函数, 当 $x<a$ 时令 $F(x)=F(a)$, 当 $x>b$ 时令 $F(x)=F(b)$, 将其延拓到 $\mathbb{R}$ 上. 对由它诱导出的测度 μ, 区间 $(-\infty,a]$ 和 (b,∞) 具有零测度. 对每个关于 μ 可积的函数 f 经常写成

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)d\mu(x)=\int_a^b f(x)dF(x).$$

若 F 产生于定义在 $\mathbb{R}$ 上的递增函数 F_0, 我们希望解释 F_0 在 a 处的可能的跳跃性, 在这种情况下, 定义

$$\int_{a^-}^b f(x)dF(x) \text{ 为 } \int_a^b f(x)d\mu_0(x),$$

其中 μ_0 是 $\mathbb{R}$ 上对应于 F_0 的测度.

(vi) 上述 Lebesgue-Stieltjes 积分可推广到 F 为有界变差函数的情形. 事实上, 设 F 是 $[a,b]$ 上的复值函数使得 $F=\sum\limits_{j=1}^4 \varepsilon_j F_j$, 每个 F_j 是递增规范化的, ε_j 取值 ±1 或 $\pm i$. 则可以定义 $\int_a^b f(x)dF(x)$ 为 $\sum\limits_{j=1}^4 \varepsilon_j \int_a^b f(x)dF_j(x)$. 这里要求 f 关于 Borel 测度 $\mu=\sum\limits_{j=1}^4 \mu_j$ 是可积的, 其中 μ_j 是对应于 F_j 的测度.

(vii) 在下列情形下, 这些积分的值是可以直接计算的.

(a) 若 $F \in AC([a,b])$, 则对每个关于 $\mu = dF$ 可积的 Borel 可测函数 f, 有

$$\int_a^b f(x)dF(x) = \int_a^b f(x)F'(x)dx.$$

(b) 若 F 是 §3.3.3中定义的纯跳跃函数: 在点 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的跃度分别为 $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$, 则当 f 连续且 $\operatorname{supp} f \subset [a,b]$ 时,

$$\int_a^b f(x)dF(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \int_{\{x_n\}} f(x)dF(x) = \sum_{j=1}^{\infty} f(x_n)\alpha_n.$$

其中测度 μ 定义为 $\mu(\{x_n\}) = \alpha_n$, 对所有不包含任何 x_n 的集合 $\mu(E) = 0$.

(c) 作为特殊例子, 取 F 为 Heaviside 函数

$$H(x) = \begin{cases} 1, & x \geqslant 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases}$$

则由 (b) 即得 (仅有一个不连续点 $x_1 = 0, \alpha_1 = 1$)

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dH(x) = f(0),$$

这是 §3.2中Dirac delta 函数的另一表达式.

§ 4.4 测度的绝对连续性

第3章中考虑的绝对连续性的概念的推广需要把测度的概念推广到可正可负的集函数上, 我们先来描述这一概念.

§ 4.4.1 带号测度

大致来说, 带号测度除了可以取负值外, 它具有测度的所有性质. 确切地说, 有如下定义.

定义 4.26. 设 $(X, \mathcal{M})$ 是一个可测空间, 称函数 $\nu : \mathcal{M} \to [-\infty, \infty]$ 是一个带号测度, 若

(i) $\nu(\varnothing) = 0$;

(ii) ν 至多取 $\pm\infty$ 中的一个;

(iii) 若 $\{E_j\}_{j=1}^{\infty}$ 为 $\mathcal{M}$ 中互不相交集, 则

$$\nu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \nu(E_j).$$

注记 4.27. 1) 由于可列多个集合取并是可以任意交换次序的, 因此 (iii) 中的级数若收敛到有限数则是无条件收敛的 (对于 $\mathbb{R}$ 中的级数而言, 无条件收敛与绝对收敛是等价的), 换言之, 任意改变级数中各项的次序, 级数的和不变.

2) 显然, 每个测度都是带号测度, 有时候将测度用 "正测度" 来表示以示强调.

来举个例子. 设 $(X, \mathcal{M}, \mu)$ 为测度空间, $f : X \to [-\infty, \infty]$ 是 μ-可测函数且 $\int f^- d\mu$ 和 $\int f^+ d\mu$ 中至少有一个是有限的 (称 f 为广义 μ-可积函数), 则由

$$\nu(E) = \int_E f d\mu$$

定义的集函数 ν 是一个带号测度.

命题 4.28. 设 ν 为 $(X, \mathcal{M})$ 上的带号测度.

(i) (下连续性) 若 $\{E_j\}$ 是 $\mathcal{M}$ 中的递增集列, 则 $\nu(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j) = \lim_{j\to\infty} \nu(E_j)$.

(ii) (上连续性) 若 $\{E_j\}$ 是 $\mathcal{M}$ 中的递减集列且 $\nu(E_1)$ 有限, 则 $\nu(\bigcap_{j=1}^{\infty} E_j) = \lim_{j\to\infty} \nu(E_j)$.

证明与正测度或 Lebesgue 测度的情形相同, 故不再赘述.

定义 4.29. 设 ν 为 $(X, \mathcal{M})$ 上的带号测度, $E \in \mathcal{M}$. 若对 E 的所有可测子集 F, 总有 $\nu(F) \geqslant 0$ (或 $\nu(F) \leqslant 0$, 或 $\nu(F) = 0$), 则称 E 为 ν 的正集(或负集, 或零集).

在上面的例子中, 当在 E 上 $f \geqslant 0$, $f \leqslant 0$, $f = 0$ μ-a.e. 时, E 分别为正集, 负集和零集.

引理 4.30. 正集的任何可测子集仍是正集, 正集的任何可列并仍是正集.

定理 4.31 (Hahn 分解定理)**.** 设 ν 为 $(X, \mathcal{M})$ 上的带号测度, 则存在 ν 的正集 P 和负集 N, 使得 $P \cup N = X$ 且 $P \cap N = \varnothing$. 若 P', N' 是另一这样的对, 则 $P \Delta P' (= N \Delta N')$ 是 ν 的零集.

定义 4.32. 设 ν 是 $(X, \mathcal{M})$ 上的带号测度, 若 P 和 N 分别是 ν 的正集和负集, 满足 $P \cup N = X$ 和 $P \cap N = \varnothing$, 则称之为关于 ν 的Hahn 分解.

Hahn 分解定理保证了 Hahn 分解的存在性, 通常情况下 Hahn 分解不是唯一的 (ν-零集可以从 P 转移到 N, 或从 N 到 P), 但它诱导了 ν 的一个规范表示, 即作为两个正测度的差. 为了叙述这一结论, 我们需要新的概念.

定义 4.33. 设 ν 和 μ 是可测空间 $(X,\mathcal{M})$ 上的两个带号测度, 若存在 $E,F\in\mathcal{M}$, 使得 $E\cap F=\varnothing, E\cup F=X, E$ 是 μ 的零集, F 是 ν 的零集, 则称 ν 和 μ 是相互奇异的, 或 ν 关于 μ 奇异, 或反过来, 记为$\nu\perp\mu$. 若对所有的 $A\in\mathcal{M}$, 都有 $\nu(A)=\nu(A\cap E)$, 则称测度 ν支撑在集合 E 上.

定理 4.34 (Jordan 分解定理). 设 ν 是一个带号测度, 则存在唯一正测度 ν^+ 和 ν^-, 使得 $\nu=\nu^+-\nu^-$ 且 $\nu^+\perp\nu^-$.

测度 ν^+ 和 ν^- 分别称为 ν 的正变差和负变差, $\nu=\nu^+-\nu^-$ 称为 ν 的Jordan 分解, 这类似于 $\mathbb{R}$ 上的有界变差函数可表示为两个递增函数的差. 定义 ν 的全变差为

$$|\nu|=\nu^++\nu^-.$$

观察到, 若 ν 不取值 ∞, 则 $\nu^+(X)=\nu(P)<\infty$, 从而 ν^+ 是有限测度且 ν 有上界 $\nu^+(X)$; 若 ν 不取值 $-\infty$ 也有类似结论. 特别地, 若 ν 的值域包含在 $\mathbb{R}$ 中, 则 ν 是有界的. 也观察到, ν 具有形式 $\nu(E)=\int_E f d\mu$, 其中 $\mu=|\nu|$, $f=\chi_P-\chi_N, X=P\cup N$ 为 ν 的 Hahn 分解.

关于带号测度的积分可以用显然的方式进行定义. 令

$$\begin{aligned}L^1(X,\nu):=&L^1(X,\nu^+)\cap L^1(X,\nu^-),\\ \int f d\nu=&\int f d\nu^+-\int f d\nu^-\quad(f\in L^1(X,\nu)).\end{aligned}$$

我们也给出如下定义: 若测度 $|\nu|$ 是有限的 (或 σ-有限的), 则称带号测度 ν 是有限的 (或 σ-有限的). 因为 $\nu\leqslant|\nu|$ 和 $|-\nu|=|\nu|$, 我们发现

$$-|\nu|\leqslant\nu\leqslant|\nu|.$$

从而, 若 ν 是 σ-有限的, 则 ν^+ 和 ν^- 也是.

§ 4.4.2 Lebesgue-Radon-Nikodym 定理

定义 4.35. 设 ν 和 μ 分别为 $(X,\mathcal{M})$ 上的带号测度和 (正) 测度, 若

$$\text{当}E\in\mathcal{M}\text{ 且 }\mu(E)=0\text{时}, \nu(E)=0, \tag{4.6}$$

则称 ν 关于 μ绝对连续, 记为 $\nu\ll\mu$.

绝对连续性与相互奇异是相对立的. 确切地说, 若 $\nu \perp \mu$ 且 $\nu \ll \mu$, 则 $\nu \equiv 0$. 事实上, 若 $A, B \in \mathcal{M}$ 不相交, $A \cup B = X$ 且 $\forall E \in \mathcal{M}$, 有 $\nu(E) = \nu(A \cap E)$, $\mu(E) = \mu(B \cap E)$, 故 $\forall E \subset B$ 有 $\nu(E) = 0$, 即 B 为 ν 零集. 另外, 显然 $\forall F \subset A$ 有 $\mu(F) = 0$, 而 $\nu \ll \mu$, 故 $\nu(F) = 0$, 即 A 为 ν 零集. 从而由**??**得 $|\nu|(B) = 0$ 和 $|\nu|(A) = 0$. 因此, $|\nu| = 0$, 从而 $\nu \equiv 0$.

一个重要例子可由关于 μ 的积分给出. 事实上, 若 $f \in L^1(X, \mu)$, 或 f 广义 μ-可积, 则由

$$\nu(E) = \int_E f d\mu \tag{4.7}$$

定义的带号测度关于 μ 是绝对连续的. 用缩写 $d\nu = f d\mu$ 代替由上式定义的 ν.

这是第3章出现的在特殊情形 $\mathbb{R}$($\mathcal{M}$ 为 Lebesgue 可测集, $d\mu = dx$ 为 Lebesgue 测度) 下提出的绝对连续概念的一个变形. 事实上, 有了(4.7)定义的 ν 和可积函数 f, 我们得到下列可取代(4.6)的更强的论断:

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists \delta > 0, \ \text{s.t.} \ \mu(E) < \delta \Longrightarrow |\nu(E)| < \varepsilon. \tag{4.8}$$

一般情况下, 条件(4.6)和(4.8)之间的关系可由下列命题阐明.

命题 4.36. 论断(4.8)蕴含(4.6). 反之, 若 $|\nu|$ 是有限测度, 则(4.6)蕴含(4.8).

有了这些准备之后, 我们来看本节的主要定理. 它保证了表达式(4.7)的逆命题, 也刻画了与给定正测度相应的带号测度的结构. 先来看一个技巧性引理.

引理 4.37. 设 ν 和 μ 是 $(X, \mathcal{M})$ 上的有限测度. 则要么 $\nu \perp \mu$, 要么存在 $\varepsilon > 0$ 和 $E \in \mathcal{M}$ 使得 $\mu(E) > 0$ 且在 E 上 $\nu \geqslant \varepsilon\mu$ (即 E 是 $\nu - \varepsilon\mu$ 的一个正集).

定理 4.38 (Lebesgue-Radon-Nikodym 定理: 带号测度情形)**.** 设 ν 是可测空间 $(X, \mathcal{M})$ 上的一个 σ-有限带号测度, μ 是 $(X, \mathcal{M})$ 上的 σ-有限正测度, 则存在 $(X, \mathcal{M})$ 上的唯一 σ-有限带号测度 λ 和 ρ, 使得

$$\lambda \perp \mu, \ \rho \ll \mu, \ \text{且} \ \nu = \lambda + \rho.$$

此外, 存在一个广义 μ-可积函数 $f : X \to \mathbb{R}$, 使得 $d\rho = f d\mu$, 且任何两个这样的函数是 μ-a.e. 相等的.

分解 $\nu = \lambda + \rho$, 其中 $\lambda \perp \mu$ 和 $\rho \ll \mu$, 称为 ν 关于 μ 的Lebesgue 分解. 当 $\nu \ll \mu$ 时, 定理 4.38说明存在某个 f 使 $d\nu = f d\mu$. 这个结果通常以Radon-Nikodym 定理而著称, f 被称为 ν 关于 μ 的Radon-Nikodym 导数, 记为 $d\nu/d\mu$:

$$d\nu = \frac{d\nu}{d\mu} d\mu.$$

(严格地说, $d\nu/d\mu$ 应该是与 f μ-a.e. 相等的函数类.) 由微分符号 $d\nu/d\mu$ 所暗示的一些公式一般是正确的. 比如: 显然有 $d(\nu_1+\nu_2)/d\mu=(d\nu_1/d\mu)+(d\nu_2/d\mu)$, 并且有以下链式法则:

命题 4.39. 设 ν 是 $(X,\mathcal{M})$ 上的 σ-有限带号测度, μ,λ 是 σ-有限测度且 $\nu\ll\mu$ 且 $\mu\ll\lambda$.

(i) 若 $g\in L^1(X,\nu)$, 则 $g(d\nu/d\mu)\in L^1(X,\mu)$ 且

$$\int g d\nu=\int g\frac{d\nu}{d\mu}d\mu.$$

(ii) 成立 $\nu\ll\lambda$, 且

$$\frac{d\nu}{d\lambda}=\frac{d\nu}{d\mu}\frac{d\mu}{d\lambda}\quad \lambda\text{-a.e.}$$

推论 4.40. 若 $\mu\ll\lambda$ 且 $\lambda\ll\mu$, 则 $\frac{d\lambda}{d\mu}\frac{d\mu}{d\lambda}=1$, a.e. (关于 λ 或 μ).

另外, 设 μ 为 $(\mathbb{R},\mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ 上的 Lebesgue 测度, ν 为在 0 处的点质量. 显然 $\nu\perp\mu$. 不存在的 Radon-Nikodym 导数 $d\nu/d\mu$ 即为所熟知的Dirac delta 函数.

我们以一个简单但重要的观察结束本节, 其证明是平凡的.

命题 4.41. 若 $\mu_1,\cdots,\mu_n$ 是 $(X,\mathcal{M})$ 上的测度, 则存在测度 μ 使得对所有的 j 有 $\mu_j\ll\mu$. (取 $\mu=\sum\limits_{j=1}^{n}\mu_j$ 即可).

§ 4.4.3 复测度

定义 4.42. 若可测空间 $(X,\mathcal{M})$ 上的映射 $\nu:\mathcal{M}\to\mathbb{C}$ 满足:

(i) $\nu(\varnothing)=0$;

(ii) 若 $\{E_j\}$ 是 $\mathcal{M}$ 中互不相交集列, 则 $\nu(\bigcup\limits_{j=1}^{\infty}E_j)=\sum\limits_{j=1}^{\infty}\nu(E_j)$, 其中级数绝对收敛.

则称 ν 为 $(X,\mathcal{M})$ 上的复测度.

特别地, 复测度不允许取无穷值. 因此, 正测度只要它有限就是一个复测度. 例如, μ 是一个正测度, $f\in L^1(X,\mu)$, 则 $fd\mu$ 是一个复测度. 另外, Lebesgue 测度显然不是复测度.

若 ν 是一个复测度, 则记它的实部和虚部分别为 ν_r 和 ν_i. 因此, ν_r 和 ν_i 是不取值 $\pm\infty$ 的带号测度, 故它们是有限的, 从而 ν 的值域是 $\mathbb{C}$ 的有界子集.

对带号测度发展的一些概念可以推广到复测度上. 比如, 可以定义 $L^1(X,\nu) = L^1(X,\nu_r) \cap L^1(X,\nu_i)$. 对 $f \in L^1(X,\nu)$, 可令 $\int f d\nu = \int f d\nu_r + i\int f d\nu_i$. 若 ν 和 μ 均为复测度, 若对 $a, b = r, i$, $\nu_a \perp \mu_b$, 则称 $\nu \perp \mu$, 若 λ 是一个正测度, 满足 $\nu_r \ll \lambda$, $\nu_i \ll \lambda$, 则称 $\nu \ll \lambda$. §4.4.2中的定理也可以推广, 仅仅分别应用它们到实部和虚部即可. 特别地:

定理 4.43 (Lebesgue-Radon-Nikodym 定理: 复测度情形)**.** 设 ν 为 $(X,\mathcal{M})$ 上的复测度, μ 是一个 σ-有限的正测度, 则存在一个复测度 λ 和一个 $f \in L^1(X,\mu)$ 使得 $\lambda \perp \mu$ 且 $d\nu = d\lambda + f d\mu$. 若另有 $\lambda' \perp \mu$ 和 $d\nu = d\lambda' + f' d\mu$, 则 $\lambda = \lambda'$ 和 $f = f'$ μ-a.e.

如之前一样, 若 $\nu \ll \mu$, 用 $d\nu/d\mu$ 表示定理 4.43中的 f.

复测度 ν 的全变差是由下列性质决定的正测度 $|\nu|$: 若 $d\nu = f d\mu$, 其中 μ 是一个正测度, 则 $d|\nu| = |f| d\mu$. 要说明这是良定的, 首先观察到每个 ν 具有形式 $f d\mu$, 其中 μ 为有限测度, $f \in L^1(X,\mu)$; 实际上, 我们能够取 $\mu = |\nu_r| + |\nu_i|$ 并用定理 4.43得到 f. 其次, 若 $d\nu = f_1 d\mu_1 = f_2 d\mu_2$, 令 $\rho = \mu_1 + \mu_2$. 则由命题 4.39得

$$f_1 \frac{d\mu_1}{d\rho} d\rho = d\nu = f_2 \frac{d\mu_2}{d\rho} d\rho,$$

故 $f_1 \frac{d\mu_1}{d\rho} = f_2 \frac{d\mu_2}{d\rho}$ ρ-a.e. 因 $\frac{d\mu_j}{d\rho}$ 是非负的, 故

$$|f_1| \frac{d\mu_1}{d\rho} = \left| f_1 \frac{d\mu_1}{d\rho} \right| = \left| f_2 \frac{d\mu_2}{d\rho} \right| = |f_2| \frac{d\mu_2}{d\rho} \quad \rho\text{-a.e.},$$

从而,

$$|f_1| d\mu_1 = |f_1| \frac{d\mu_1}{d\rho} d\rho = |f_2| \frac{d\mu_2}{d\rho} d\rho = |f_2| d\mu_2.$$

因此, $|\nu|$ 的定义不依赖于 μ 和 f 的选取. 这个定义和之前带号测度 ν 的全变差 $|\nu|$ 的定义是一致的, 因为那种情况下 $d\nu = (\chi_P - \chi_N) d|\nu|$, 其中 $X = P \cup N$ 是 Hahn 分解, 且 $|\chi_P - \chi_N| = 1$.

命题 4.44. 设 ν 为 $(X,\mathcal{M})$ 上的一个 (非零) 复测度, 下列结论成立:

(a) $\forall E \in \mathcal{M}$, $|\nu(E)| \leqslant |\nu|(E)$.

(b) $\nu \ll |\nu|$, 且 $\frac{d\nu}{d|\nu|}$ 的绝对值 $|\nu|$-a.e. 为 1.

(c) $L^1(X,\nu) = L^1(X,|\nu|)$, 若 $f \in L^1(X,\nu)$, 则 $|\int f d\nu| \leqslant \int |f| d|\nu|$.

命题 4.45. 若 ν_1, ν_2 是 $(X,\mathcal{M})$ 上的复测度, 则 $|\nu_1 + \nu_2| \leqslant |\nu_1| + |\nu_2|$.